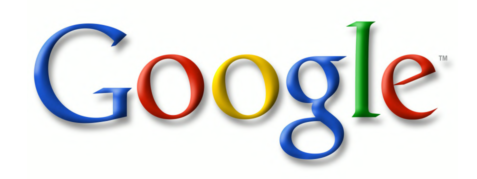
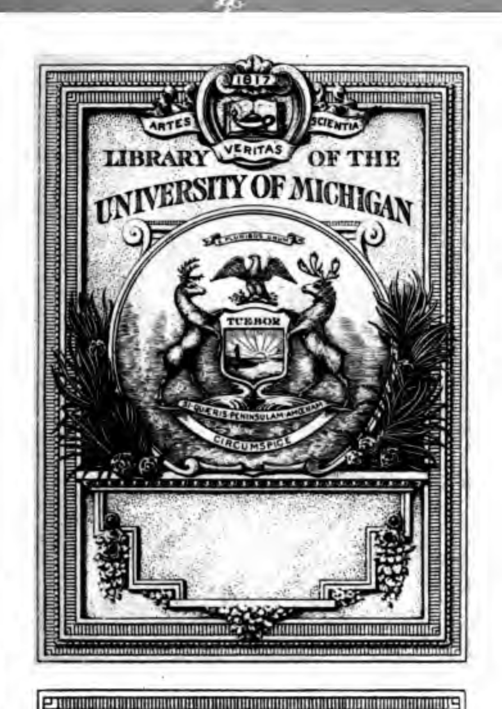



1817
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE



THÉORIE ANALYTIQUE

DU

SYSTÈME DU MONDE.

THÉORIE ANALYTIQUE

DU

SYSTÈME DU MONDE.

IMPRIMERIE DE HUZARD-COURCIER,
rue du Jardinet, n° 12.

THÉORIE ANALYTIQUE

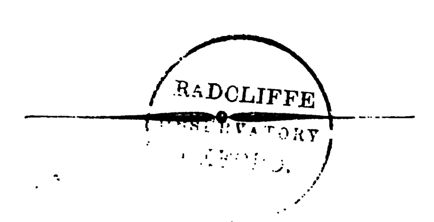
DU

SYSTÈME DU MONDE,

PAR

M. G. DE PONTÉCOULANT,
Ancien Élève de l'École Polytechnique, Capitaine au Corps royal d'État-Major.

TOME SECOND.



PARIS,
BACHELIER, SUCCESSEUR DE Mme Ve COURCIER,
LIBRAIRE POUR LES MATHÉMATIQUES,
QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.

1829

TABLE DES MATIÈRES

CONTENUES DANS LE SECOND VOLUME.

LIVRE TROISIÈME.

Théorie des comètes.

CHAPITRE PREMIER. *Détermination approchée des orbites des comètes, d'après les données fournies par l'observation.*

CHAPITRE II. *Correction des élémens de l'orbite déterminés par* 1 *première approximation.*

CHAPITRE III. *Perturbations du mouvement elliptique des com*

CHAPITRE IV. *Application de la théorie précédente aux comètes périodiques de 1682, de 1819 et de 1825.*

LIVRE QUATRIÈME.

Du mouvement de rotation des corps célestes.

CHAPITRE Ier. *Intégration des équations différentielles qui déterminent les mouvemens des corps célestes autour de leurs centres de gravité.*

CHAPITRE II. *Du mouvement de la Terre autour de son centre de gravité.*

CHAPITRE III. *Déplacement des pôles à la surface de la Terre variation de la vitesse de rotation.*

CHAPITRE IV. *Mouvement de l'axe de rotation de la Terre l'espace, ou nutation de l'axe terrestre, et précession des noxes.*

CHAPITRE V. *Mouvement de rotation de la Lune autour de son centre de gravité.*

LIVRE CINQUIÈME.

De la figure des corps célestes.

CHAPITRE Ier. *Formules générales pour déterminer les attracti des sphéroïdes quelconques.*

CHAPITRE II. *Attractions des sphéroïdes terminés par des surf du second ordre.*

CHAPITRE III. *Des attractions des sphéroïdes quelconques.*

CHAPITRE IV. *De la figure d'une masse fluide homogène, équilibre et douée d'un mouvement de rotation.*

CHAPITRE V. *De la figure qui convient à l'équilibre d'une ma fluide homogène, douée d'un mouvement de rotation, et dont figure primitive est supposée très peu différente de la sphère.*

NOTES.

ERRATA.

Tome Premier.

age 78, ligne 8, au lieu de $\int\frac{dm}{r}.\cos\gamma$, *lisez* $\int\frac{dm}{f^2}.\cos\gamma$

121, 5, en remontant, au lieu de sin ϕ, *lisez* sin ψi....

Ibid. 6, en remontant, au lieu de $z \sin\theta \sin\phi$, *lisez* $z \sin\theta \cos\phi$

142, 2, en remontant, au lieu de $\sin(\varphi - \varphi_1)$, *lisez* $\sin(\varphi_1 - \varphi)$

198, 3, en remontant, au lieu de divisée, *lisez* divisés

352, 2, en remontant, au lieu de $3a'.(a,a'a')$, *lisez* $3aa'.(a,a')'$

362, 2, en remontant, au lieu de $\left(\frac{dA_{,}}{da}\right)$ et de $\left(\frac{d^2A_{,}}{da^2}\right)$, *lisez* $\left(\frac{dA_{,}^{(1)}}{da}\right)$ et $\left(\frac{d^2A_{,}^{(1)}}{da^2}\right)$

385, 18, au lieu de $5n' - 3n$, *lisez* $5n' - 2n$

432, au bas de la page, *ajoutez* on trouve de cette manière

433, ligne 3, au lieu de a^2a', *lisez* $a^2a'^2$

438, 1, en remontant, au lieu de longitude et de..., *lisez* longitude de...

Tome second.

age 109, ligne 5, au lieu de $y^{(n)}$, *lisez* $\frac{1}{2}y^{(n)}$

127, 12, en remontant, au lieu de pourrait, *lisez* pouvait

144, 2, en remontant, au lieu de cos b, *lisez* cos c

226, 2, en remontant, au lieu de ψ, *lisez* $\psi_{,}$

THÉORIE ANALYTIQUE

DU

SYSTÈME DU MONDE.

LIVRE TROISIÈME.

Théorie des Comètes.

JUSQU'A la fin du dix-septième siècle, on avait regardé les comètes comme des phénomènes particuliers dans le système du monde : Newton montra qu'elles sont, comme les planètes, soumises aux lois de la gravitation universelle ; et il rendit un éminent service à l'Astronomie en les rattachant par ce lien au reste de notre système solaire, et à la Philosophie en dissipant pour jamais les vaines terreurs qu'inspirait leur apparition.

La théorie des comètes peut se diviser en deux points principaux. Le premier a pour objet la détermination de leurs orbites d'après les données fournies par l'observation ; le second, celle des perturbations qu'elles peuvent éprouver par l'action des planètes. Nous allons examiner successivement dans ce livre ces deux grandes questions.

CHAPITRE PREMIER.

Détermination approchée des orbites des Comètes.

1. Les comètes sont des astres qui diffèrent des planètes, non-seulement par leurs apparences physiques, mais encore par la marche irrégulière qu'ils affectent. Elles parcourent au hasard toutes les régions de l'espace, les unes dans un sens, les autres dans la direction opposée. Les plans de leurs orbites ne sont plus compris dans une zone étroite de la sphère céleste, ils peuvent avoir entre eux des inclinaisons quelconques; mais les comètes sont, comme les planètes, assujetties à la loi de la pesanteur universelle, et elles décrivent en vertu de ce principe des courbes rentrantes dont le Soleil occupe un des foyers. Probablement, et l'analogie nous porte à le croire, les orbes des comètes, sont, comme ceux des planètes, des courbes elliptiques; mais ces ellipses sont très allongées, et leurs grands axes presque infinis, puisque nous n'apercevons ces astres que dans une partie de leur cours lorsqu'ils approchent du Soleil, et qu'ensuite ils disparaissent totalement à nos yeux armés de tous les instrumens que l'esprit humain inventa pour en prolonger la portée. Ce ne serait donc qu'une question de pure curiosité, intéressante sous le point de vue analytique,

mais peu importante aux besoins de l'Astronomie, que celle qui aurait pour but de déterminer les élémens de l'orbite d'une comète, d'après les observations faites pendant la courte durée de son apparition, si nous ne devions plus l'apercevoir dans la suite, et si elle avait abandonné pour toujours les limites de notre système planétaire. Mais il faut observer que c'est le seul moyen que nous ayons de reconnaître cet astre lorsque, après avoir accompli sa révolution, il reviendra vers le Soleil. Il ne faut pas en effet compter pour cela sur ses propriétés optiques; l'étendue du noyau, la chevelure, la disposition de la queue, l'éclat de sa lumière, toutes ces données varient à chaque instant de forme, de grandeur et d'intensité, à mesure que les comètes approchent du Soleil ou de la Terre, et les circonstances enfin dans lesquelles elles se trouvent changent à chaque révolution, parce que la matière si rare qui compose leur chevelure et leur queue se dissipe graduellement dans l'espace.

C'est donc en comparant les élémens de la comète que l'on observe, à ceux des comètes qui ont été observées précédemment, que l'on peut s'assurer si cet astre apparaît en effet pour la première fois, ou si ce n'est qu'une comète déjà connue qui revient à son périhélie. Il devient donc indispensable de calculer ses élémens. Newton le premier, dans son admirable ouvrage des Principes, a donné une solution de ce problème, fondée sur des considérations géométriques très ingénieuses. Halley, par des calculs immenses, l'appliqua à toutes les comètes connues de son temps. Ce travail porta son fruit, et ce grand astro-

la longitude du nœud, et le grand axe. Ce dernier élément est le seul qui puisse laisser de l'incertitude, parce qu'il faudrait, pour le déterminer exactement, connaître la durée d'une révolution de la comète, ce qu'on ignore presque toujours : mais on peut remarquer que lorsque la comète est près de son périhélie, et c'est alors seulement que nous l'apercevons, l'ellipse qu'elle décrit se confond sensiblement avec la parabole qui a son sommet en ce point, et qui est décrite du même foyer, en sorte que le mouvement apparent de l'astre et les résultats de l'observation sont les mêmes que s'il avait lieu sur cette courbe. On suppose par cette raison, pour faciliter le calcul des élémens, que l'orbite est parabolique. La solution du problème contient alors une équation de plus que d'inconnues, et l'on peut en profiter pour choisir, entre les diverses combinaisons de ces équations, celle qui doit conduire à des résultats plus exacts. Lorsqu'on est parvenu de cette manière à une première connaissance approchée de l'orbite, en employant trois nouvelles observations séparées par des intervalles de temps plus considérables, on rectifie les élémens que l'on a obtenus de manière à satisfaire le plus exactement possible à l'ensemble des observations connues. Plusieurs méthodes ont été imaginées dans ce but; celle que nous exposerons ici mérite d'être adoptée définitivement par les astronomes qui s'occupent de ces recherches, et qui doivent désirer d'éviter les longueurs de calcul et la perte de temps, que les autres méthodes occasionent trop souvent.

Après ces notions nécessaires sur la solution générale du problème, nous allons en développer l'analyse; nous donnerons ensuite des exemples numériques qui faciliteront l'application de la méthode que nous exposons.

2. Soient x, y, z les coordonnées de la comète dans son orbite autour du Soleil, rapportées à un plan fixe que nous supposerons être celui de l'écliptique; soit $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ sa distance au Soleil.

Soient X et Y les coordonnées de la Terre dans l'écliptique, et $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ sa distance au Soleil ou son rayon vecteur.

Enfin désignons par ξ, η, ζ les trois coordonnées de la comète rapportées à trois axes passant par le centre de la Terre, et par $\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ la distance de la comète à la Terre, en sorte qu'on ait

$$x = X + \xi, \quad y = Y + \eta, \quad z = \zeta. \qquad (1)$$

Soient maintenant a la longitude géocentrique de la comète, et b sa latitude; soit A la longitude de la Terre dans le même instant; il est aisé de voir qu'on aura

$$X = R.\cos A, \quad Y = R.\sin A, \quad \xi = \rho.\cos a.\cos b,$$
$$\eta = \rho.\sin a.\cos b, \quad \zeta = \rho.\sin b.$$

Ces valeurs substituées dans les équations (1) donneront

$$\left.\begin{aligned} x &= R.\cos A + \rho.\cos a.\cos b, \\ y &= R.\sin A + \rho.\sin a.\cos b, \\ z &= \rho.\sin b. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Chaque observation fournira trois équations semblables; si l'on ajoute ensemble les carrés de ces équations, on en tire

$$r^2 = R^2 + 2R\rho . \cos(A - a) . \cos b + \rho^2,$$

équation que donne d'ailleurs immédiatement le triangle rectiligne formé par le Soleil, la comète et la Terre. En effet, si l'on nomme c l'angle entre le Soleil et la comète, ou ce que les astronomes appellent son *élongation*, R et ρ seront les côtés qui comprennent cet angle, et r le côté opposé; on aura donc

$$r^2 = R^2 - 2R\rho . \cos c + \rho^2. \qquad (3)$$

Or l'angle c a pour mesure l'hypoténuse d'un triangle sphérique rectangle dont b et $180° - A + a$ sont les deux autres côtés; on aura donc

$$\cos c = - \cos(A - a) . \cos b,$$

et les deux valeurs de r^2 sont par conséquent identiques.

Les observations font connaître les deux angles a et b; l'angle A et le rayon R se calculent par les tables du Soleil; les équations (2) renferment donc encore quatre inconnues, x, y, z et ρ, et ne peuvent suffire par conséquent pour les déterminer. Il faut, pour y parvenir, faire quelque hypothèse sur la nature de l'orbite que décrit la comète; la plus simple est de supposer cette orbite parabolique. Dans ce cas, on peut, n° 32, liv. II, exprimer les coordonnées de la comète relatives à une époque quelconque, en séries ordonnées

par rapport au temps, et ne dépendant que de six quantités supposées connues, qui sont les trois coordonnées de la comète à une époque donnée et les trois coefficiens différentiels de ces coordonnées. Si l'on substitue donc ces valeurs dans les équations (2), elles renfermeront sept inconnues, savoir, les six quantités dont nous venons de parler, et l'indéterminée ρ; mais chaque observation donnant trois équations semblables, si l'on choisit trois observations faites à des intervalles de temps connus, il est clair que les neufs équations qui en résulteront ne renfermeront plus que neuf inconnues, et suffiront par conséquent pour en déterminer la valeur. On aura même, en y joignant l'équation du mouvement parabolique, une équation de plus que d'inconnues, et le problème pourra être, avec ces données, complètement résolu.

Prenons donc trois observations séparées par des intervalles de temps θ et θ' assez courts pour que les séries (k) du n° 32, livre II, soient convergentes. Prenons pour l'époque d'où nous comptons le temps t, et qu'on est libre de choisir arbitrairement, celle qui répond à l'observation moyenne; désignons par x, y, z les coordonnées de la comète à cet instant, rapportées au centre du Soleil, et par $x_{,}=\frac{dx}{dt}$, $y_{,}=\frac{dy}{dt}$, $z_{,}=\frac{dz}{dt}$, leurs trois coefficiens différentiels; désignons par x°, y°, z°, les coordonnées de la comète qui répondent à l'époque $t=-\theta$ de l'observation qui a précédé, et par x', y', z' celles qui répondent à l'époque $t=\theta'$ de l'observation suivante. Si l'on développe par

la méthode du numéro cité, ces six quantités suivant les puissances de θ et de θ', on aura pour les déterminer des expressions de cette forme

$$\begin{aligned} x^\circ &= \mathrm{v}x + \mathrm{u}x_{,}, & x' &= \mathrm{v}'x + \mathrm{u}'x_{,}, \\ y^\circ &= \mathrm{v}y + \mathrm{u}y_{,}, & y' &= \mathrm{v}'y + \mathrm{u}'y_{,}, \\ z^\circ &= \mathrm{v}z + \mathrm{u}z_{,}, & z' &= \mathrm{v}'z + \mathrm{u}'z_{,}; \end{aligned}$$

les lettres v, u, v', u', exprimant des fonctions ordonnées par rapport aux puissances de θ et de θ', qui renferment en outre le rayon vecteur r et les quantités $s = \frac{rdr}{dt}$ et $\frac{ds}{dt}$ relatifs à l'époque $t = 0$. Les valeurs de v, u, v', u' se détermineront en faisant successivement $t = -\theta$ et $t = \theta'$ dans les fonctions que nous avons représentées par V et U dans le n° 32, liv. II.

3. Cela posé, soient a°, a, a' les trois longitudes géocentriques de la comète, b°, b, b' ses trois latitudes, et ρ°, ρ, ρ' les distances de la comète à la Terre dans chacune des trois observations. Soient de plus A°, A, A' les trois longitudes héliocentriques de la Terre, R°, R, R' ses trois rayons vecteurs correspondans, et enfin X°, Y°, X, Y, X', Y' ses coordonnées rapportées au centre du Soleil, et relatives aux mêmes instans, en sorte qu'on ait

$$\begin{aligned} X^\circ &= R^\circ \cos A^\circ, & X &= R \cos A, & X' &= R' \cos A', \\ Y^\circ &= R^\circ \sin A^\circ, & Y &= R \sin A, & Y' &= R' \sin A'. \end{aligned}$$

En supposant de plus pour abréger :

$$\begin{aligned} m^\circ &= \cos a^\circ \cos b^\circ, & n^\circ &= \sin a^\circ \cos b^\circ, & p^\circ &= \sin b^\circ, \\ m &= \cos a \cos b, & n &= \sin a \cos b, & p &= \sin b, \\ m' &= \cos a' \cos b', & n' &= \sin a' \cos b', & p' &= \sin b'. \end{aligned}$$

Les équations (2) donneront pour les trois observations faites aux époques où l'on compte $t = 0$, $t = -\theta$, $t = \theta'$ le système d'équations suivant :

Pour la première époque,

$$\left.\begin{array}{l} x = X + m\rho, \\ y = Y + n\rho, \\ z = p\rho; \end{array}\right\} \qquad (a)$$

Pour la seconde,

$$\left.\begin{array}{l} vx + ux_{,} = X^{\circ} + m^{\circ}\rho^{\circ}, \\ vy + uy_{,} = Y^{\circ} + n^{\circ}\rho^{\circ}, \\ vz + uz_{,} = p^{\circ}\rho^{\circ}; \end{array}\right\} \qquad (b)$$

Pour la troisième,

$$\left.\begin{array}{l} v'x + u'x_{,} = X' + m'\rho', \\ v'y + u'y_{,} = Y' + n'\rho', \\ v'z + u'z_{,} = p'\rho'. \end{array}\right\} \qquad (c)$$

Il ne s'agit plus que d'éliminer entre ces équations les inconnues qu'elles renferment pour avoir les valeurs de celles de ces inconnues qui sont nécessaires à la détermination de l'orbite de la comète. Or nous avons vu n° 34, livre II, qu'il suffisait pour cela de connaître les trois distances ρ°, ρ, ρ' et les trois rayons vecteurs correspondans r°, r, r'; en éliminant donc des neufs équations précédentes les six inconnues x, y, z, $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ on parviendra à trois équations finales entre ρ°, ρ, ρ', au moyen desquelles on déterminera leurs valeurs. Celles de r°, r, r' seront données chacune par une équation semblable à l'équation (3) que fournira

chaque observation, et l'on pourra par conséquent résoudre ainsi complètement la question. C'est de cette manière que Lagrange a traité le premier le problème de la détermination des orbites des comètes d'après trois observations; mais cette méthode, qui semble d'abord la plus simple, est sujette dans les applications, surtout quand on veut pousser un peu loin la précision, à quelques difficultés qu'il nous a paru convenable d'éviter, ce qui est aisé en choisissant pour déterminer l'orbite de la comète les six quantités $x, y, z, x_{\prime}, y_{\prime}, z_{\prime}$, au lieu des six quantités $\rho^{\circ}, \rho, \rho', r^{\circ}, r, r'$. Nous avons vu en effet qu'au moyen de ces valeurs l'orbite pouvait être parfaitement fixée de grandeur et de position, et que c'étaient même les données les plus commodes qu'on pût choisir pour cet objet; nous prendrons donc ces quantités pour les inconnues dont il s'agit de trouver la valeur, et nous éliminerons des équations précédentes les distances $\rho^{\circ}, \rho, \rho'$ qui ne feraient qu'embarrasser notre marche. Nous parviendrons de cette manière à la solution la plus simple et la plus exacte peut-être qu'il soit possible de donner du problème qui nous occupe. Si des équations (a), (b), (c) on élimine les trois inconnues $\rho^{\circ}, \rho, \rho'$, on aura

$$\left.\begin{aligned} mz &= p.(x-X), \quad nz = p.(y-Y), \\ m^{\circ}.(\text{v}z+\text{u}z_{\prime}) &= p^{\circ}.(\text{v}x+\text{u}x_{\prime}-X^{\circ}), \\ n^{\circ}.(\text{v}z+\text{u}z_{\prime}) &= p^{\circ}.(\text{v}y+\text{u}y_{\prime}-Y^{\circ}), \\ m'.(\text{v}'z+\text{u}'z_{\prime}) &= p'.(\text{v}'x+\text{u}'x_{\prime}-X'), \\ n'.(\text{v}'z+\text{u}'z_{\prime}) &= p'.(\text{v}'y+\text{u}'y_{\prime}-Y'). \end{aligned}\right\} (4)$$

Si dans ces quatre dernières équations on substitu

pour x et y leurs valeurs en z, qu'on élimine ensuite $x_{\prime}$ et $y_{\prime}$ entre les équations résultantes, qu'on fasse $\text{v}\text{u}' - \text{v}'\text{u} = \text{u}''$, et que, pour abréger, on suppose

$$X'\text{u} - X^{\circ}\text{u}' + X\text{u}'' = L, \quad Y'\text{u} - Y^{\circ}\text{u}' + Y\text{u}'' = L',$$

on aura les deux équations suivantes

$$\text{u}\text{u}'.(m'p^{\circ}-m^{\circ}p').z_{\prime} = [\text{v}\text{u}'.(m^{\circ}p-mp^{\circ}).p'-\text{v}'\text{u}.(m'p-mp').p^{\circ}].\frac{z}{p} - p^{\circ}p'.L,$$

$$\text{u}\text{u}'.(n'p^{\circ}-n^{\circ}p').z_{\prime} = [\text{v}\text{u}'.(n^{\circ}p-np^{\circ}).p'-\text{v}'\text{u}.(n'p-np').p^{\circ}].\frac{z}{p} - p^{\circ}p'.L'.$$

Si de ces équations on tire les valeurs de z et de $z_{\prime}$, et que pour simplifier on fasse

$$\Delta = \frac{1}{p^{\circ}}.[(m^{\circ}p-mp^{\circ}).(n'p^{\circ}-n^{\circ}p') - (m'p^{\circ}-m^{\circ}p').(n^{\circ}p-np^{\circ})]$$
$$= (m'n-mn').p^{\circ} + (m^{\circ}n'-m'n^{\circ}).p + (mn^{\circ}-m^{\circ}n).p',$$

on trouvera

$$\Delta\text{u}''z = (n'p^{\circ}-n^{\circ}p').p.L - (m'p^{\circ}-m^{\circ}p').p.L', \quad (5)$$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta.\text{u}\text{u}'\text{u}''.z_{\prime} = [\text{v}\text{u}'.(n^{\circ}p-np^{\circ}).p'-\text{v}'\text{u}.(n'p-np').p^{\circ}].L \\ \quad -[\text{v}\text{u}'.(m^{\circ}p-mp^{\circ}).p'-\text{v}'\text{u}.(m'p-mp').p^{\circ}].L'.\end{array}\right\} (6)$$

Si l'on élimine entre les six équations (4) les quatre inconnues x, y, $y_{\prime}$, $z_{\prime}$, et que pour abréger on fasse

$$X'\text{u}.\frac{n'}{m'} - X^{\circ}\text{u}'.\frac{n^{\circ}}{m^{\circ}} + X.\left(\text{v}\text{u}'.\frac{n^{\circ}}{m^{\circ}} - \text{v}'\text{u}.\frac{n'}{m'}\right) = M,$$

$$X\text{u}.\frac{p'}{m'} - X^{\circ}\text{u}'.\frac{p^{\circ}}{m^{\circ}} + X.\left(\text{v}\text{u}'.\frac{p^{\circ}}{m^{\circ}} - \text{v}'\text{u}.\frac{p'}{m'}\right) = M',$$

on aura les deux équations suivantes

$$\text{υυ}'.(m^\circ n'-m'n^\circ).x_{,}=[\text{vυ}'.(mn^\circ-m^\circ n).m'-\text{v}'\text{υ}.(mn'-m'n).m^\circ].\frac{z}{p}$$
$$+m^\circ m.(\text{M}-\text{L}'),$$

$$\text{υυ}'.(m^\circ p'-m'p^\circ).x_{,}=[\text{vυ}'.(mp^\circ-m^\circ p).m'-\text{v}'\text{υ}.(mp'-m'p).m^\circ].\frac{z}{p}$$
$$+m^\circ m'.\text{M}'.$$

Si l'on élimine entre elles l'inconnue z, on aura pour dé terminer $x_{,}$

$$\left.\begin{aligned}\Delta.\text{υυ}'\text{υ}''.x_{,}=&[\text{vυ}'.(mn^\circ-m^\circ n).m'-\text{v}'\text{υ}.(mn'-m'n).m^\circ].\text{M}'\\-&[\text{vυ}'.(mp^\circ-m^\circ p).m'-\text{v}'\text{υ}.(mp'-m'p).m^\circ].(\text{M}-\text{L}')\end{aligned}\right\}(7)$$

De même en changeant dans cette équation $x_{,}$ en $y_{,}$, m°, m, m' en n°, n, n', et réciproquement, et en faisant pour abréger

$$\left.\begin{aligned}\text{Y}'\text{υ}.\frac{m'}{n'}-\text{Y}^\circ\text{υ}'.\frac{m^\circ}{n^\circ}+\text{Y}.\left(\text{vυ}'.\frac{m^\circ}{n^\circ}-\text{v}'\text{υ}.\frac{m'}{n'}\right)=\text{N},\\\text{Y}'\text{υ}.\frac{p'}{n'}-\text{Y}^\circ\text{υ}'.\frac{p^\circ}{n^\circ}+\text{Y}.\left(\text{vυ}'.\frac{p^\circ}{n^\circ}-\text{v}'\text{υ}.\frac{p'}{n'}\right)=\text{N}',\end{aligned}\right\}(8)$$

on trouvera pour déterminer $y_{,}$,

$$\left.\begin{aligned}\Delta.\text{υυ}'\text{υ}''.y_{,}=&[\text{vυ}'.(mn^\circ-m^\circ n).n'-\text{v}'\text{υ}.(mn'-m'n).n^\circ].\text{N}'\\-&[\text{vυ}'.(n^\circ p-np^\circ).n'-\text{v}'\text{υ}.(n'p-np').n^\circ].(\text{N}-\text{L}).\end{aligned}\right\}(9)$$

4. Nous voici donc parvenus à exprimer sous forme linéaire les six quantités x, y, z, $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, qui doivent servir à fixer l'orbite de la comète en fonction des quantités v, υ, v′, υ′, et de quantités toutes connues. Les valeurs de v, υ, v′, υ′, sont, comme nous l'avons vu, données par des séries qui procèdent suivant les puissances ascendantes du temp et qui renferment de plus les trois indéterminée

r, $s = \frac{rdr}{dt}$ et $\frac{ds}{dt}$. Il faut donc connaître encore les valeurs de ces quantités avant de pouvoir faire usage des formules précédentes. Or la première peut aisément se déterminer au moyen de l'équation (3) du n° 2; en effet, si l'on substitue dans cette équation pour ρ sa valeur en z donnée par la troisième des équations (a), qu'on compare ensuite l'équation résultante à l'équation (5), on aura deux équations entre les deux inconnues r et z, d'où l'on pourra toujours conclure par l'élimination la valeur de chacune d'elles. Quant aux deux autres indéterminées s et $\frac{ds}{dt}$, nous donnerons le moyen de faire disparaître la première de ces formules, et la seconde n'y sera pas introduite par la substitution des valeurs de v, u, v′, u′, lorsqu'on ne poussera les approximations que jusqu'aux carrés du temps, ce qui suffira dans presque toutes les circonstances; nous pouvons donc ne pas nous en occuper ici, et regarder les formules précédentes comme très propres à résoudre entièrement la question que nous traitons.

Pour développer ces formules, reprenons les valeurs de V et de U données n° 32, livre II. En ne poussant l'approximation que jusqu'aux quatrièmes puissances du temps t, on a

$$\left.\begin{aligned} V &= 1 - \frac{t^2}{2r^3} + \frac{st^3}{2r^5} + \left(\frac{ds}{dt} - \frac{5s^2}{r^2} + \frac{1}{3r}\right) \cdot \frac{t^4}{8r^5}, \\ U &= t - \frac{t^3}{6r^3} + \frac{st^4}{4r^5}. \end{aligned}\right\} (m)$$

En faisant successivement $t = -\theta$ et $t = \theta'$, on aura

les valeurs des quantités que nous avons représentées par v, u, v', u'. On trouve ainsi, en rejetant les termes inutiles,

$$v = 1 - \frac{\theta^2}{2r^3} - \frac{s\theta^3}{2r^5}, \qquad v' = 1 - \frac{\theta'^2}{2r^3} + \frac{s\theta'^3}{2r^5};$$

$$u = -\theta + \frac{\theta^3}{6r^3} + \frac{s\theta^4}{4r^5}, \quad u' = \theta' - \frac{\theta'^3}{6r^3} + \frac{s\theta'^4}{4r^5};$$

et comme $u'' = vu' - v'u$, on aura

$$u'' = \theta' + \theta - \frac{(\theta' + \theta)^3}{6r^3} + \frac{s.(\theta' - \theta).(\theta' + \theta)^3}{4r^5}.$$

Pour donner à nos formules toute la simplicité qu'elles sont susceptibles d'acquérir, il convient d'exprimer les coordonnées X°, Y°, X', Y' de la Terre, qui se rapportent aux observations extrêmes, en fonction du temps, et des coordonnées X, Y relatives à l'époque où l'on compte $t = 0$. Nous supposerons donc

$$X^\circ = VX + UX_{,}, \quad X' = V'X + U'X_{,},$$
$$Y^\circ = VY + UY_{,}, \quad Y' = V'Y + U'Y_{,},$$

en faisant, pour abréger, $X_{,} = \frac{dX}{dt}$, $Y_{,} = \frac{dY}{dt}$ et en désignant par V, U, V', U' des fonctions semblables à celles que nous avons nommées v, u, v', u', et qu'on obtiendra en faisant successivement $t = -\theta$, $t = \theta'$ dans les équations (m), après y avoir changé r en R et s en S; on aura ainsi

$$V = 1 - \frac{\theta^2}{2R^3} - \frac{S\theta^3}{2R^5}, \qquad V' = 1 - \frac{\theta'}{2R^3} + \frac{S\theta'^3}{2R^5},$$

$$U = -\theta + \frac{\theta^3}{6R^3} + \frac{S\theta^4}{4R^5}, \quad U' = \theta' - \frac{\theta'^3}{6R^3} + \frac{S\theta'^4}{4R^5}$$

Pour abréger, nous supposerons dans ce qui va suivre

$$U'' = Vu' - V'u, \quad U_{\prime}'' = Uu' - U'u.$$

Les valeurs précédentes donneront donc

$$U'' = \theta' + \theta - \frac{\theta\theta'.(\theta'+\theta)}{2R^3} - \frac{\theta'^3 + \theta^3}{6r^3} + \left(\frac{S.\theta\theta'}{2R^5} + \frac{s.(\theta^2+\theta'^2)}{4r^5}\right).(\theta'^2 - \theta^2),$$

$$U_{\prime}'' = \frac{\theta\theta'.(\theta'^2 - \theta^2)}{6}.\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right),$$

et par suite

$$U'' - u'' = \frac{\theta\theta'.(\theta'+\theta)}{2}.\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right) - \frac{\theta\theta'.(\theta'^2 - \theta^2)}{2}.\left(\frac{s}{r^5} - \frac{S}{R^5}\right).$$

Nous supposerons de plus

$$vu' + v'u = v'', \quad Vu' + V'u = V'', \quad Uu' + U'u = V_{\prime}''.$$

Mais dans ces quantités nous n'aurons besoin que de considérer les termes du troisième ordre; on trouvera ainsi

$$v'' = \theta' - \theta - \frac{(\theta'-\theta)^3}{6r^3}, \; V'' = \theta' - \theta - \frac{\theta'^3 - \theta^3}{6r^3} + \frac{\theta\theta'.(\theta'-\theta)}{2R^3}, \; V_{\prime}'' = -2.\theta\theta',$$

d'où l'on tire

$$V'' - v'' = -\frac{\theta\theta'.(\theta'-\theta)}{2}.\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right).$$

Il ne s'agit plus que de substituer à la place de X^o, Y^o, X', Y' et des quantités v, u, v', etc., leurs valeurs dans les fonctions que nous avons désignées par L, L', M, M', N et N'.

5. Nous considérerons d'abord le cas particulier où

les observations sont supposées faites à des intervalles de temps égaux, parce que les formules qui résultent de cette hypothèse acquièrent une grande simplicité, et qu'on peut d'ailleurs y ramener le cas général en calculant trois observations équidistantes par des interpolations faites entre les observations données.

Si l'on remplace X°, X', Y°, Y' par leurs valeurs, les expressions de L et L' deviennent

$$L=(\upsilon''-U'').X+U_{\prime}''.X_{\prime},$$
$$L'=(\upsilon''-U'').Y+U_{\prime}''.Y_{\prime}.$$

Dans le cas particulier où $\theta=\theta'$, on a

$$\upsilon''=2\theta-\frac{4\theta^3}{3r^3},\quad U''=2\theta-\frac{\theta^3}{3r^3}-\frac{\theta^3}{R^3},$$

et $U_{\prime}''=0$. Si pour abréger on fait $\frac{1}{r^3}-\frac{1}{R^3}=\sigma$, on aura par conséquent

$$L=-\theta^3\sigma X,\quad L'=-\theta^3\sigma Y.$$

On trouverait de la même manière

$$M=\left[(V'-v')\upsilon.\frac{n'}{m'}-(V-v)\upsilon'.\frac{n^{\circ}}{m^{\circ}}\right].X+\left(U'\upsilon.\frac{n'}{m'}-U\upsilon'.\frac{n^{\circ}}{m^{\circ}}\right).X_{\prime}.$$

Si dans cette équation on met pour V, V', U, U', v, v', υ, υ' leurs valeurs et qu'on néglige les termes du cinquième ordre et des ordres supérieurs, on trouve aisément

$$M=-\frac{\theta^3\sigma}{2}.\left(\frac{n^{\circ}}{m^{\circ}}+\frac{n'}{m'}\right).X+\theta^2.\left(\frac{n^{\circ}}{m^{\circ}}-\frac{n'}{m'}\right).X_{\prime}.$$

aurait semblablement

$$= -\frac{\theta^3\sigma}{2}\cdot\left(\frac{p^0}{m^0}+\frac{p'}{m'}\right).X+\theta^2.\left(\frac{p^0}{m^0}-\frac{p'}{m'}\right).X_{,},$$

$$= -\frac{\theta^3\sigma}{2}\cdot\left(\frac{m^0}{n^0}+\frac{m'}{n'}\right).Y+\theta^2.\left(\frac{m^0}{n^0}-\frac{m'}{n'}\right).X_{,},$$

$$= -\frac{\theta^3\sigma}{2}\cdot\left(\frac{p^0}{n^0}+\frac{p'}{n'}\right).Y+\theta^2.\left(\frac{p^0}{n^0}-\frac{p'}{n'}\right).Y_{,}.$$

Si l'on substitue pour L et L' leurs valeurs dans l'é-
ation (5), qu'on remplace ensuite z par sa valeur
ns les deux premières équations (4), on aura

$$= X+\frac{\sigma\theta^2}{2\Delta}.[(n^0p'-n'p^0).m.X-(m^0p'-m'p^0).m.Y],$$

$$= Y+\frac{\sigma\theta^2}{2\Delta}.[(n^0p'-n'p^0).n.X-(m^0p'-m'p^0).n.Y],$$

$$= \frac{\sigma\theta^2}{2\Delta}.[(n^0p'-n'p^0).p.X-(m^0p'-m'p^0).p.Y].$$

s trois équations (6), (7), (9), en substituant pour L,
M, M', N, N', leurs valeurs, donneront de même

$$= X_{,}+\frac{\sigma\theta}{2\Delta}.\left\{\begin{array}{l}[(n'p-np').m^0+(n^0p-np^0).m'].X\\ -[(m'p-mp').m^0+(m^0p-mp^0).m'].Y\end{array}\right\},$$

$$= Y_{,}+\frac{\sigma\theta}{2\Delta}.\left\{\begin{array}{l}[(n'p-np').n^0+(n^0p-np^0).n'].X\\ -[(m'p-mp').n^0+(m^0p-mp^0).n'].Y\end{array}\right\},$$

$$= \frac{\sigma\theta}{2\Delta}.\left\{\begin{array}{l}[(n'p-np').p^0+(n^0p-np^0).p'].X\\ -[(m'p-mp').p^0+(m^0p-mp^0).p'].Y\end{array}\right\}.$$

l'on remplace maintenant dans ces formules les
tres m^0, n^0, p^0, m, n, p, m', n', p' par les valeurs
'elles représentent, et que pour abréger on fasse

$$\left.\begin{aligned}C^{\circ} &= \text{tang}\, b\, .\sin(A - a') - \text{tang}\, b'\, .\sin(A - a),\\ C &= \text{tang}\, b'\, .\sin(A - a^{\circ}) - \text{tang}\, b^{\circ}\, .\sin(A - a'),\\ C' &= \text{tang}\, b^{\circ}\, .\sin(A - a) - \text{tang}\, b\, .\sin(A - a^{\circ}),\end{aligned}\right\}(C)$$

et

$$D = \text{tang}\, b^{\circ}\, .\sin(a' - a) + \text{tang}\, b\, .\sin(a^{\circ} - a') + \text{tang}\, b'\, .\sin(a - a^{\circ}), \quad (D)$$

ce qui donne

$$\Delta = -\cos b^{\circ} \cos b \cos b'\, .\, D;$$

qu'on substitue pour X et Y leurs valeurs

$$X = R\, .\cos A, \quad Y = R\, .\sin A,$$

on trouvera après des réductions faciles

$$\left.\begin{aligned}x &= X + \frac{R\sigma\theta^2}{2D}\, .\, C\cos a,\\ y &= Y + \frac{R\sigma\theta^2}{2D}\, .\, C\sin a,\\ z &= \frac{R\sigma\theta^2}{2D}\, .\, C\,\text{tang}\, b,\\ x_{,} &= X_{,} + \frac{R\sigma\theta}{2D}\, .\, (C^{\circ}\cos a^{\circ} - C'\cos a'),\\ y_{,} &= Y_{,} + \frac{R\sigma\theta}{2D}\, .\, (C^{\circ}\sin a^{\circ} - C'\sin a'),\\ z_{,} &= \frac{R\sigma\theta}{2D}\, .\, (C^{\circ}\text{tang}\, b^{\circ} - C'\text{tang}\, b');\end{aligned}\right\}(A)$$

formules d'une simplicité remarquable. En leur joignant l'équation (3) du n° 2, on aura tout ce qui est nécessaire à la détermination des valeurs des six quantités x, y, z, $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$.

6. Si l'on substitue dans la troisième pour z sa valeur

$\rho \sin b$, et pour σ la quantité qu'elle représente, cette formule donnera

$$\rho = \frac{R\rho' C}{2D\cos b} \cdot \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right). \qquad (10)$$

En faisant donc, pour abréger,

$$h = \frac{R\rho' C}{2D\cos b},$$

on aura pour déterminer les inconnues ρ et r les deux équations

$$\left.\begin{aligned} \rho &= h \cdot \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right), \\ r^2 &= R^2 - \rho \cdot (2R\cos C) + \rho^2. \end{aligned}\right\} \quad (B)$$

On pourrait éliminer entre ces équations l'une des inconnues qu'elles renferment; en substituant, par exemple, dans la deuxième à la place de ρ sa valeur, on parviendra à une équation finale du huitième degré en r, mais qui s'abaissera d'elle-même au septième. Cette équation, résolue par approximation, donnera la valeur de r; mais il est plus commode dans les applications de conserver les deux équations (B), et de déterminer simultanément la valeur de ρ et de r par la méthode ordinaire des fausses positions.

Quand les valeurs de ρ et de r seront connues, on aura aisément celles des six quantités $x, y, z, x_{\prime}, y_{\prime}, z_{\prime}$ par les formules (A), et l'on en conclura celles des élémens de l'orbite par les formules du n° 29, livre II.

7. Le grand axe est donné par l'équation

$$\frac{2}{r} - \frac{1}{a} = x_{\prime}^2 + y_{\prime}^2 + z_{\prime}^2.$$

Si l'on suppose que l'orbite de la comète est une parabole, on aura $\frac{1}{a} = 0$, et l'équation précédente deviendra

$$\frac{2}{r} = x_{\prime}^{2} + y_{\prime}^{2} + z_{\prime}^{2}. \qquad (11)$$

On aura ainsi une nouvelle équation qui pourra servir à déterminer le rayon vecteur r ou à vérifier les valeurs obtenues par les formules précédentes. Il sera bon de l'employer à la place de l'équation (10), parce qu'elle a l'avantage de ne pas contenir la quantité D qui est très petite du troisième ordre par rapport à l'intervalle de temps θ, comme nous le ferons voir plus bas, de sorte que les erreurs des observations peuvent avoir sur elle une influence sensible. Pour la faire disparaître de même des formules (A), je remarque que l'équation (10) donne

$$\frac{R\delta\theta}{2D} = \frac{\rho \,.\, \cos b}{C\theta}.$$

Les trois premières équations (A) deviendront donc ainsi

$$\left.\begin{aligned} x &= X + \rho.\cos b.\cos a, \\ y &= Y + \rho.\cos b.\sin a, \\ z &= \rho.\sin b, \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

valeurs qui coïncident d'ailleurs avec celles du n° 2, et les trois dernières donneront

$$\left.\begin{aligned} x_{\prime} &= X_{\prime} + \frac{\rho.\cos b}{C\theta}.(C^{\circ}\cos a^{\circ} - C'\cos a'), \\ y_{\prime} &= Y_{\prime} + \frac{\rho.\cos b}{C\theta}.(C^{\circ}\sin a^{\circ} - C'\sin a'), \\ z_{\prime} &= \frac{\rho.\cos b}{C\theta}.(C^{\circ}\operatorname{tang} b^{\circ} - C'\operatorname{tang} b'). \end{aligned}\right\} (13)$$

Si, pour abréger, on suppose

$$F = \frac{\cos b}{C\theta}.(C^0 \cos a^0 - C' \cos a'),$$

$$G = \frac{\cos b}{C\theta}.(C^0 \sin a^0 - C' \sin a'),$$

$$H = \frac{\cos b}{C\theta}.(C^0 \tang b^0 - C' \tang b'),$$

les valeurs précédentes deviennent

$$\left.\begin{array}{l} x_{,} = X_{,} + F.\rho, \\ y_{,} = Y_{,} + G.\rho, \\ z_{,} = \qquad H.\rho. \end{array}\right\} \quad (14)$$

Si l'on élève au carré chacune de ces valeurs, et qu'on la substitue ensuite dans l'équation (11), on aura

$$\frac{2}{r} = X_{,}^2 + Y_{,}^2 + 2\rho.(FX + GY) + \rho^2.(F^2 + G^2 + H^2). \quad (15)$$

Cette équation, jointe à l'équation

$$r^2 = R^2 - \rho.(2R \cos c) + \rho^2, \quad (16)$$

que l'on obtient en ajoutant de même les carrés des valeurs de x, y, z, servira à déterminer les deux inconnues ρ et r.

Si entre ces deux équations on éliminait r ou ρ, l'équation résultante serait du sixième degré; mais, comme nous l'avons dit, il vaut mieux, pour les applications, laisser ces équations sous cette forme, et les résoudre par les méthodes ordinaires d'approximation.

trois latitudes correspondantes b^o, b, b' de la comète, ainsi que la longitude A de la Terre dans son orbite, et le rayon vecteur R, relatifs à l'observation moyenne, on commencera par calculer les trois quantités C^o, C, C' par les formules (C); et l'on déterminera, par leur moyen, les trois quantités P, Q, H. On formera ensuite les équations (18) et (19), et en les résolvant par approximation, on aura les valeurs de r et de ρ, à l'aide desquelles on trouvera celles des six quantités x, y, z, $x_{\prime}$, $y_{\prime}$, $z_{\prime}$, par les formules (17) ou (20). Ces quantités, une fois connues, les élémens de l'orbite seront donnés par les formules du n° 29, livre II.

Il ne faudra pas perdre de vue, lorsqu'on fera usage des formules précédentes, qu'elles ne sont exactes qu'aux quantités près de l'ordre θ^3, et que par conséquent les intervalles de temps doivent être assez courts pour que les séries (m) soient convergentes, sans cependant être trop resserrés, parce que, dans ce cas, le mouvement géocentrique de la comète étant trop petit, les erreurs des observations ont une plus grande influence sur les résultats. En prenant généralement des observations dont les deux extrêmes soient séparées par un intervalle de temps qui n'excède pas dix à douze jours, on satisfera à la première condition sans tomber dans l'inconvénient d'opérer sur des observations trop rapprochées.

11. Puisque le problème de la détermination de l'orbite parabolique des comètes contient en général plus d'équations que d'inconnues, il est clair qu'on pourra donner, pour le résoudre, une infinité de méthodes

en combinant de différentes manières ces équations entre elles. Toutes ces méthodes donneraient des résultats également exacts, si l'on pouvait compter sur les données fournies par l'observation; mais comme leur précision n'est jamais rigoureuse, il faudra, parmi les combinaisons qu'on peut faire des équations primitives du problème, choisir celle qui emploie le moins de ces données, et qui, par conséquent, est plus exempte que les autres des erreurs des observations. Il est bon, pour éclairer cette question, de faire quelques remarques sur la signification des quantités que nous avons désignées par D, C°, C, C'. Considérons, pour cela, le triangle sphérique formé par les arcs de grand cercle qui joignent les lieux de la comète dans les trois observations données; soient $C^{\circ}C$, $C^{\circ}C'$, CC', les trois côtés de ce triangle, et désignons par C', C, C° les angles respectivement opposés. Les trois quantités m°, n°, p° représentent les cosinus de l'angle que fait le rayon ρ° mené de la Terre à la comète avec les trois axes coordonnés; les quantités m, n, p et m', n', p' représentent les mêmes cosinus, relatifs à la seconde et à la troisième observation; on aura donc par les théorèmes connus,

$$\cos(C^{\circ}C) = m^{\circ}m + n^{\circ}n + p^{\circ}p, \quad \cos(C^{\circ}C') = m^{\circ}m' + n^{\circ}n' + p^{\circ}p'$$
$$\cos(CC') = mm' + nn' + pp',$$

ou bien, en remplaçant dans ces équations m°, n°, p°, etc., par leurs valeurs n° 3,

$$\cos(C^\circ C) = \cos(a^\circ - a)\cos b^\circ \cos b + \sin b^\circ \sin b,$$
$$\cos(CC') = \cos(a - a')\cos b \cos b' + \sin b \sin b',$$
$$\cos(C'C^\circ) = \cos(a' - a^\circ)\cos b^\circ \cos b' + \sin b^\circ \sin b'.$$

Reprenons maintenant la valeur de Δ, numéro cité,

$$\Delta = (m'n - mn').p^\circ + (m^\circ n' - m'n^\circ).p + (mn^\circ - m^\circ n).p'.$$

Si l'on élève au carré cette quantité, on pourra écrire ainsi le résultat

$$\begin{aligned}\Delta^2 = &(m^{\circ 2} + n^{\circ 2} + p^{\circ 2})(m'^2 + n'^2 + p'^2)(m^2 + n^2 + p^2)\\ &+ 2(m^\circ m + n^\circ n + p^\circ p).(m^\circ m' + n^\circ n' + p^\circ p').(mm' + nn' + pp')\\ &- (m^{\circ 2} + n^{\circ 2} + p^{\circ 2}).(mm' + nn' + pp')^2\\ &- (m^2 + n^2 + p^2).(m^\circ m' + n^\circ n' + p^\circ p')^2\\ &- (m'^2 + n'^2 + p'^2).(m^\circ m + n^\circ n + p^\circ p)^2,\end{aligned}$$

équation qui se vérifie, en effet, en la développant. Or, on a, entre les quantités m°, n°, p°, etc., ces équations de condition

$$m^{\circ 2} + n^{\circ 2} + p^{\circ 2} = 1, \quad m^2 + n^2 + p^2 = 1, \quad m'^2 + n'^2 + p'^2 = 1;$$

on aura donc simplement,

$$\begin{aligned}\Delta^2 = &1 + 2.\cos(C^\circ C).\cos(C^\circ C').\cos(CC')\\ &- \cos^2(C^\circ C) - \cos^2(C^\circ C') - \cos^2(CC').\end{aligned}$$

On a d'ailleurs, n° 5, $D = -\frac{\Delta}{\cos b^\circ . \cos b . \cos b'}$. On voit donc que la quantité D n'est qu'une combinaison particulière des élémens du triangle $C^\circ CC'$ intercepté sur la surface de la sphère par les trois lieux de la comète, et qui résulte entièrement des observations. On peut donner à la valeur de Δ une autre forme

qui a l'avantage de montrer de quelle manière cette quantité participe aux erreurs dont elles sont affectées. Pour cela, remarquons que l'angle C° du triangle $C^{\circ}CC'$ étant opposé au côté CC', on a

$$\cos(CC') = \cos(C^{\circ}C).\cos(C^{\circ}C') + \sin(C^{\circ}C).\sin(C^{\circ}C').\sin C^{\circ}.$$

Si l'on substitue cette valeur dans l'expression de Δ^{2} et qu'on extraie la racine carrée, on trouve

$$\Delta = \sin(C^{\circ}C).\sin(C^{\circ}C').\sin C^{\circ},$$

équation où l'on peut d'ailleurs changer C° en C ou C° en C', et réciproquement.

Il est évident maintenant que si les observations sont très rapprochées, comme on est obligé de le supposer pour faciliter la détermination des orbites des comètes, les arcs $C^{\circ}C$ et $C^{\circ}C'$ seront fort petits et l'angle C° différera peu de deux angles droits. La quantité Δ, et par conséquent D, sera donc une très petite quantité du troisième ordre sur laquelle les erreurs des observations auront la plus grande influence; il faudra donc, comme nous l'avons déjà dit, éviter autant que possible l'emploi de cette quantité. On peut remarquer encore que la valeur de D serait rigoureusement nulle, si C° était égal à deux angles droits, c'est-à-dire si le lieu de la comète dans la troisième observation, se trouvait dans le plan du grand cercle mené par les lieux de la première et de la seconde observation; et l'on sait en effet que pour que trois points dont les longitudes respectives sont a°, a, a', et les latitudes b°, b, b', soient situés dans le plan d'un même

grand cercle, il faut qu'on ait l'équation de condition

$$\tang b . \sin (a^{\circ}-a)+\tang b^{\circ} . \sin(a'-a)+\tang b' . \sin(a-a^{\circ})=0.$$

Passons aux quantités que nous avons nommées C, C°, C', et commençons par la première. Si l'on considère le triangle sphérique SC°C' formé par les arcs de grand cercle qui joignent les lieux du Soleil dans l'observation moyenne, et ceux de la comète dans les observations extrêmes, il sera facile de voir que C est une fonction composée des élémens de ce triangle, de la même manière que D se forme des élémens du triangle C°CC'. Il suffit, pour s'en convaincre, d'observer que la valeur de C se déduit de celle de D en remplaçant, dans cette dernière, les quantités qui se rapportent à l'observation moyenne de la comète par celles qui dépendent de la position du Soleil à la même époque. Si l'on suppose donc

$$\Gamma=\sin(SC) . \sin(SC') . \sin S,$$

C sera du même ordre que Γ, et l'on aura

$$C=-\frac{\Gamma}{\cos b^{\circ} . \cos b'};$$

on aurait des expressions semblables pour C° et C', en considérant les triangles sphériques SCC' et SC°C.

On voit, par conséquent, que les quantités C°, C, C' sont simplement du premier ordre; elles dépendent d'ailleurs en partie des lieux du Soleil, qui peuvent être regardés comme exacts, puisqu'ils se calculent par

les tables : on doit donc les employer de préférence à la quantité D qui est du troisième ordre, et qui ne dépend que des données de l'observation, et c'est par cette raison que nous l'avons tout-à-fait rejetée dans la méthode exposée plus haut.

12. Il faut observer cependant qu'il y a des cas où cette méthode elle-même peut conduire à des résultats incertains? ce sont ceux où les lieux de la comète, dans deux des trois observations, sont situés à peu près dans le même plan que le Soleil à l'époque de l'observation moyenne. On voit, en effet, que cette circonstance rend très petite l'une des quantités C°, C, C', et elles ne peuvent plus alors être déterminées avec assez de précision. Le seul moyen de remédier à cet inconvénient, qui est surtout très grave relativement à la quantité C qui entre dans les dénominateurs des valeurs de F, G, H, P, Q, serait de recourir aux équations primitives (4) et de chercher à en former une combinaison nouvelle par laquelle on pût éviter de faire usage de ces quantités; mais les formules qu'on obtient ainsi conduisent à des calculs beaucoup trop longs et trop compliqués pour que la pratique puisse s'en accommoder. Ce qu'il y a donc de plus simple à faire dans ce cas, c'est de choisir trois nouvelles observations pour déterminer l'orbite, ou si l'intervalle qui sépare les observations extrêmes sur lesquelles on opère ne permet pas, par son peu d'étendue, d'éviter l'embarras dont il s'agit, de regarder les élémens obtenus par la méthode précédente comme une première approximation des vrais élémens, et de les

rectifier ensuite, d'après l'ensemble des observations, par les méthodes ordinaires.

13. Nous allons maintenant considérer le cas général où les observations données sont séparées par des intervalles de temps quelconques, mais que nous supposerons toujours peu considérables. Reprenons les quatre équations (5, 6, 7 et 9), n° 3 : si pour simplifier les calculs on suppose

$$
\begin{array}{lll}
l^\circ = \cot b^\circ . \cos a^\circ, & l = \cot b . \cos a, & l' = \cot b' . \cos a', \\
h^\circ = \cot b^\circ . \sin a^\circ, & h = \cot b . \sin a, & h' = \cot b' . \sin a', \\
f^\circ = \operatorname{tang} a^\circ, & f = \operatorname{tang} a, & f' = \operatorname{tang} a', \\
g^\circ = \dfrac{\operatorname{tang} b^\circ}{\cos a^\circ}, & g = \dfrac{\operatorname{tang} b}{\cos a}, & g' = \dfrac{\operatorname{tang} b'}{\cos a'}, \\
c^\circ = \cot a^\circ, & c = \cot a, & c' = \cot a', \\
d^\circ = \dfrac{\operatorname{tang} b^\circ}{\sin a^\circ}, & d = \dfrac{\operatorname{tang} b}{\sin a}, & d' = \dfrac{\operatorname{tang} b'}{\sin a'}.
\end{array}
$$

ces équations pourront s'écrire ainsi,

$$
\left.
\begin{array}{rl}
\Delta' . \upsilon'' . z = & (h' - h^\circ) . \mathrm{L} - (l' - l^\circ) . \mathrm{L}', \\
\Delta' . \upsilon\upsilon'\upsilon'' . z_{,} = & [\mathrm{v}\upsilon' . (h^\circ - h) - \mathrm{v}'\upsilon . (h' - h)] . \mathrm{L} \\
& - [\mathrm{v}\upsilon' . (l^\circ - l) - \mathrm{v}'\upsilon . (l' - l)] . \mathrm{L}', \\
\Delta'' . \upsilon\upsilon'\upsilon'' . x_{,} = & [\mathrm{v}\upsilon' . (f^\circ - f) - \mathrm{v}'\upsilon . (f' - f)] . \mathrm{M}' \\
& - [\mathrm{v}\upsilon' . (g^\circ - g) - \mathrm{v}'\upsilon . (g' - g)] . (\mathrm{M} - \mathrm{L}'), \\
\Delta''' . \upsilon\upsilon'\upsilon'' . y_{,} = & [\mathrm{v}\upsilon' . (c^\circ - c) - \mathrm{v}'\upsilon . (c' - c)] . \mathrm{N}' \\
& - [\mathrm{v}\upsilon' . (d^\circ - d) - \mathrm{v}'\upsilon . (d' - d)] . (\mathrm{N} - \mathrm{L}),
\end{array}
\right\} (21)
$$

en faisant, pour abréger,

$$\Delta' = \frac{\Delta}{p^\circ p p'}, \quad \Delta'' = \frac{\Delta}{m^\circ m m'}, \quad \Delta''' = \frac{-\Delta}{n^\circ n n'}.$$

Développons ces formules pour en déduire les valeurs des six quantités x, y, z, $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$. Afin d'éviter toute opération inutile, nous remarquerons d'abord

que le produit $uu'u''$ étant du troisième ordre par rapport aux intervalles θ et θ', si l'on veut avoir seulement dans les valeurs de x, y, etc., les termes du premier et du second ordre par rapport au temps, il suffira de conserver dans le développement des équations précédentes les termes du cinquième ordre inclusivement qui, par la division, s'abaisseront au second, et l'on pourra négliger tous les autres. Or, les coefficiens des quantités représentées par L, L', M, M', N, N' étant au moins du premier ordre, il suffira d'avoir égard dans le développement de leurs valeurs aux termes du quatrième ordre. Cela posé, si pour abréger on fait

$$\frac{\theta'+\theta}{2}=\theta'', \quad \frac{\theta'-\theta}{2}=\theta_{\prime}'', \quad \frac{1}{r^3}-\frac{1}{R^3}=\sigma, \quad \frac{s}{r^5}-\frac{S}{R^5}=\zeta,$$

et qu'on suppose

$$X_1=\left(\frac{\sigma}{2}-\theta_{\prime}''\zeta\right).X+\frac{\theta_{\prime}''\sigma}{3}.X_{\prime},$$

$$Y_1=\left(\frac{\sigma}{2}-\theta_{\prime}''\zeta\right).Y+\frac{\theta_{\prime}''\sigma}{3}.Y_{\prime};$$

on trouvera par les valeurs de L et L', données n° 5,

$$L=-2.\theta\theta'\theta''.X_1, \quad L'=-2.\theta\theta'\theta''.Y_1.$$

La première des équations (21), en y substituant ces valeurs et en divisant les deux membres par $2\theta''$, deviendra

$$z=\frac{\theta\theta'}{\Delta'}.[(l'-l^{\circ}).Y_1-(h'-h^{\circ}).X_1].$$

Quant à la seconde, remarquons que les quantités L et L′ étant du troisième ordre, il suffira de conserver dans leurs coefficiens les termes du premier et du second ordre en θ et θ'; on trouve ainsi

$$\begin{aligned} \mathrm{v}\upsilon'.(h^\circ-h)-\mathrm{v}'\upsilon.(h'-h) &= \theta'.(h^\circ-h)+\theta.(h'-h) \\ &= \theta''.(h^\circ+h'-2h)+\theta_{\prime}''.(h^\circ-h'), \\ \mathrm{v}\upsilon'.(l^\circ-l)-\mathrm{v}'\upsilon.(l'-l) &= \theta'.(l^\circ-l)+\theta.(l'-l) \\ &= \theta''.(l^\circ+l'-2l)+\theta_{\prime}''.(l^\circ-l'). \end{aligned}$$

En observant donc que $\upsilon\upsilon'\upsilon''=-2\theta\theta'\theta''$, on aura

$$\left.\begin{aligned} x_{\prime} = \frac{\theta''}{\Delta'}.[(h^\circ+h'-2h).\mathrm{X}_1-(l^\circ+l'-2l).\mathrm{Y}_1] \\ -\frac{\theta_{\prime}''}{\Delta'}.[(h'-h^\circ).\mathrm{X}_1-(l'-l^\circ).\mathrm{Y}_1]. \end{aligned}\right\} (22)$$

La valeur de M donnée n° 3, en ayant égard à la signification que nous avons supposée aux lettres U″, V″, υ″, v″, $\mathrm{U}_{\prime}''$, $\mathrm{V}_{\prime}''$, peut prendre cette forme

$$\begin{aligned} \mathrm{M} = \tfrac{1}{2}.[(\upsilon''-\mathrm{U}'').(f'+f^\circ)-(\mathrm{v}''-\mathrm{V}'').(f'-f^\circ)].\mathrm{X} \\ -\tfrac{1}{2}.[\mathrm{U}_{\prime}''.(f'+f^\circ)-\mathrm{V}_{\prime}''.(f'-f^\circ)].\mathrm{X}_{\prime}. \end{aligned}$$

Pour simplifier les résultats, nous observerons que la différence $f'-f^\circ$ est une quantité très petite de l'ordre de l'intervalle de temps $\theta+\theta'$ qui sépare les observations extrêmes, en sorte qu'on peut dans la valeur de $x_{\prime}$ négliger son produit par des quantités dépendantes de la cinquième puissance du temps. En substituant pour υ″, U″, etc., leurs valeurs, on aura ainsi

$$\mathrm{M} = -\theta\theta'\theta''.(f'+f^\circ).\mathrm{X}_1-\theta\theta'.(f'-f^\circ).(\mathrm{X}_{\prime}+\tfrac{1}{2}.\sigma\theta_{\prime}''.\mathrm{X}).$$

on trouverait par des réductions semblables aux précédentes,

$$M' = -\theta\theta'\theta''.(g'+g^o).X_1 - \theta\theta'.(g'-g^o).(X_, + \tfrac{1}{2}.\sigma\theta_,''.X),$$

$$vv'.(f^o-f) - v'v.(f'-f) = \theta''.(f^o+f'-2f) - \theta_,''.(f'-f^o),$$
$$vv'.(g^o-g) - v'v.(g'-g) = \theta''.(g^o+g'-2g) - \theta_,''.(g'-g^o);$$

on aura par conséquent

$$\left.\begin{array}{l} x_, - X_, = \frac{\theta''}{\Delta''}.\{[(f^og-fg^o)+(f'g-fg').].X_1+(g^o+g'-2g).Y_1\} \\ \quad -\frac{\theta_,''}{\Delta''}.\{(f'g^o-f^og').X_1+(g'-g^o).Y_1\} + \tfrac{1}{2}.\sigma\theta_,''.X. \end{array}\right\}(23)$$

Enfin, on obtiendrait d'une manière analogue

$$N = -\theta\theta'\theta''.(c'+c^o).Y_1 - \theta\theta'.(c'-c^o).(Y_, + \tfrac{1}{2}.\sigma\theta_,''.Y),$$
$$N' = -\theta\theta'\theta''.(d'+d^o).Y_1 - \theta\theta'.(d'-d^o).(Y_, + \tfrac{1}{2}.\sigma\theta_,''.Y),$$
$$vv'.(c^o-c) - v'v.(c'-c) = \theta''.(c^o+c'-2c) - \theta_,''.(c'-c^o),$$
$$vv'.(d^o-d) - v'v.(d'-d) = \theta''.(d^o+d'-2d) - \theta_,''.(d'-d^o),$$

et par suite

$$\left.\begin{array}{l} y_, - Y_, = \frac{\theta''}{\Delta''}.\{[(c^od-cd^o)+(c'd-cd')].Y_1+(d^o+d'-2d).X_1\} \\ \quad -\frac{\theta_,''}{\Delta''}.\{(c'd^o-c^od').Y_1+(d'-d^o).X_1\} + \tfrac{1}{2}.\sigma\theta_,''.Y. \end{array}\right\}(24)$$

14. Pour réduire les formules précédentes à une forme semblable à celle des formules (A) n° 5, nous observerons d'abord que l'on a par hypothèse

$$X_1 = \left(\frac{\sigma}{2} - \theta_,''\zeta\right).X + \frac{\theta_,''\sigma}{3}.X_,,$$
$$Y_1 = \left(\frac{\sigma}{2} - \theta_,''\zeta\right).Y + \frac{\theta_,''\sigma}{3}.Y_,.$$

Or, si l'on fait

$$\frac{\sigma}{2}-\theta_{,}''\zeta=\xi,$$

le facteur $\theta_{,}''\sigma$ pourra être représenté par $2\theta_{,}''\xi$; car la différence de ces deux quantités ou $\frac{1}{2}(\theta'-\theta)^2.\zeta$ se trouve de l'ordre des quantités que l'on est en droit de négliger. On peut donc mettre les valeurs de X_1 et Y_1 sous cette forme plus simple

$$X_1=\xi.(X+\tfrac{2}{3}.\theta_{,}''X_{,}),$$
$$Y_1=\xi.(Y+\tfrac{2}{3}.\theta_{,}''Y_{,}).$$

Remarquons encore que les quantités $X_{,}$, $Y_{,}$ se trouvent multipliées dans ces expressions par la quantité très petite $\theta_{,}''$, en sorte qu'on peut, dans leurs valeurs, négliger les termes très petits dépendans de l'excentricité de l'orbite terrestre, ce qui donnera $X_{,}=-\sin A$, $Y_{,}=+\cos A$, ou encore $X_{,}=-R.\sin A$, $Y_{,}=R.\cos A$; on aura donc par conséquent

$$X_1=R\xi.(\cos A-\tfrac{2}{3}\theta_{,}''\sin A),\quad Y_1=R\xi.(\sin A+\tfrac{2}{3}\theta_{,}''\cos A).$$

Si l'on substitue ces valeurs dans les expressions de z, $z_{,}$, $x_{,}$, $y_{,}$, qu'on y remplace f, g, h, l, c, d, etc., par les quantités que ces lettres représentent, qu'on suppose pour abréger

$$C_{,}^{\circ}=\tang b.\cos(A-a')-\tang b'.\cos(A-a),$$
$$C_{,}=\tang b'.\cos(A-a^{\circ})-\tang b^{\circ}.\cos(A-a'),$$
$$C_{,}'=\tang b^{\circ}.\cos(A-a)-\tang b.\cos(A-a^{\circ}),$$

en faisant attention aux valeurs de Δ, Δ', Δ'', n° 13,

on trouvera d'abord

$$z = \frac{R\xi\theta\theta'}{D} \cdot \text{tang}\, b \cdot (C + \tfrac{2}{3}\theta_{,}'' \cdot C_{,}),$$

et les formules (22) (23) (24) donneront ensuite

$$\left.\begin{array}{l}
x_{,} = X_{,} + \frac{R\xi\theta''}{D} \cdot [C^{o}\cos a^{o} - C'\cos a' + \tfrac{2}{3}\theta_{,}'' \cdot (C_{,}^{o}\cos a^{o} - C_{,}'\cos a')] \\
\quad + \frac{R\xi\theta_{,}''}{D} \cdot (C + \tfrac{2}{3}\theta_{,}'' \cdot C_{,}) \cos a + R\xi\theta_{,}'' \cdot \cos A, \\
y_{,} = Y_{,} + \frac{R\xi\theta''}{D} \cdot [C^{o}\sin a^{o} - C'\sin a' + \tfrac{2}{3}\theta_{,}'' \cdot (C_{,}^{o}\sin a^{o} - C_{,}'\sin a')] \\
\quad + \frac{R\xi\theta_{,}''}{D} \cdot (C + \tfrac{2}{3}\theta_{,}'' \cdot C_{,}) \sin a + R\xi\theta_{,}'' \cdot \sin A, \\
z' = \frac{R\xi\theta''}{D} \cdot [C^{o}\text{tang}\, b^{o} - C'\text{tang}\, b' + \tfrac{2}{3}\theta_{,}'' \cdot (C_{,}^{o}\text{tang}\, b^{o} - C_{,}'\text{tang}\, b')] \\
\quad + \frac{R\xi\theta_{,}''}{D} \cdot (C + \tfrac{2}{3}\theta_{,}'' \cdot C_{,}) \cdot \text{tang}\, b.
\end{array}\right\} (A')$$

Si dans ces formules on suppose $\theta = \theta'$, ce qui donne $\theta'' = \theta$, $\theta_{,}'' = 0$ et $\xi = \frac{1}{2}\sigma$, on retrouve les formules (A) du n° 5, ce qui peut servir à confirmer leur exactitude. On peut d'ailleurs faire prendre aux formules précédentes une forme plus simple encore; en effet, si l'on suppose

$$C^{o} + \tfrac{2}{3}\theta_{,}'' \cdot C_{,}^{o} = C_{1}^{o}, \quad C + \tfrac{2}{3}\theta_{,}'' \cdot C_{,} = C_{1}, \quad C' + \tfrac{2}{3}\theta_{,}'' \cdot C_{,}' = C_{1}',$$

la valeur de z devient

$$z = \frac{R\xi\theta\theta'}{D} \cdot C_{1} \cdot \text{tang}\, b,$$

et les trois formules (A') donnent

$$\left.\begin{aligned}
x_{,}&=X_{,}+\frac{R\xi\theta''}{D}.(C_{1}{}^{\circ}\cos a^{\circ}-C_{1}{}'\cos a')+\frac{R\xi\theta_{,}''}{D}.C_{1}\cos a+R\xi\theta_{,}''.\cos A,\\
y_{,}&=Y_{,}+\frac{R\xi\theta''}{D}.(C_{1}{}^{\circ}\sin a^{\circ}-C_{1}{}'\sin a')+\frac{R\xi\theta_{,}''}{D}.C_{1}\sin a+R\xi\theta_{,}''.\sin A,\\
z_{,}&=\frac{R\xi\theta''}{D}.(C_{1}{}^{\circ}\operatorname{tang} b^{\circ}-C_{1}{}'\operatorname{tang} b')+\frac{R\xi\theta_{,}''}{D}.C_{1}\operatorname{tang} b.
\end{aligned}\right\}(D)$$

Pour éliminer du dénominateur de ces formules le coefficient D, dont l'inexactitude doit faire autant que possible éviter l'emploi, observons que la valeur de z donne $\frac{R\xi}{D}=\frac{z}{\theta\theta'C_{1}.\operatorname{tang} b}$, ou, comme $z=\rho\sin b$, $\frac{R\xi}{D}=\frac{\rho\cos b}{\theta\theta'C_{1}}$. Si l'on substitue donc cette valeur dans les formules (D), en faisant pour abréger

$$\begin{aligned}
F_{,}&=\frac{\cos b}{\theta\theta'C_{1}}.[\theta''.(C_{1}{}^{\circ}\cos a^{\circ}-C_{1}{}'\cos a')+\theta_{,}''.C_{1}\cos a+\theta_{,}''.D\cos A],\\
G_{,}&=\frac{\cos b}{\theta\theta'C_{1}}.[\theta''.(C_{1}{}^{\circ}\sin a^{\circ}-C_{1}{}'\sin a')+\theta_{,}''.C_{1}\sin a+\theta_{,}''.D\sin A],\\
H_{,}&=\frac{\cos b}{\theta\theta'C_{1}}.[\theta''.(C_{1}{}^{\circ}\operatorname{tang} b^{\circ}-C_{1}{}'\operatorname{tang} b')+\theta_{,}''.C_{1}\operatorname{tang} b],
\end{aligned}$$

on aura simplement

$$\begin{aligned}
x_{,}&=X_{,}+F'.\rho,\\
y_{,}&=Y_{,}+G'.\rho,\\
z_{,}&=H'.\rho.
\end{aligned}$$

Si l'on forme les carrés de ces trois valeurs, et qu'on les ajoute en observant que leur somme est égale à $\frac{2}{r}$, n° 7, on aura

$$\frac{2}{r}=\frac{2}{R}-1+2\rho.(F_{,}X+G_{,}Y)+\rho^{2}.(F_{,}^{2}+G_{,}^{2}+H_{,}^{2}).$$

Cette équation jointe à l'équation

$$r^2 = R^2 - \rho\,.\,(2R\cos c) + \rho^2,$$

servira à déterminer les valeurs de r et de ρ.

Enfin si l'on veut faire prendre aux valeurs de $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, la forme que nous leur avons donnée n° 9, on fera

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\cos b}{\theta\theta' C_1}\,.\left\{\theta''.\left[C_1{}^{\circ}\sin(A-a^{\circ})-C_1{}'\sin(A-a')\right]+\theta_{,}''.C_1\sin(A-a)\right\}, \\ \dfrac{\cos b}{\theta\theta' C_1}\,.\left\{\theta''.\left[C_1{}^{\circ}\cos(A-a^{\circ})-C_1{}'\cos(A-a')\right]+\theta_{,}''.C_1\cos(A-a)+\theta_{,}''.D\right\}, \\ \dfrac{\cos b}{\theta\theta' C_1}\,.\left[\theta''.(C_1{}^{\circ}\operatorname{tang} b^{\circ} - C_1{}'\operatorname{tang} b') + \theta_{,}''.\,C_1\operatorname{tang} b\right]. \end{array}\right\}(25)$$

En substituant ensuite pour $X_{,}$ et $Y_{,}$ leurs valeurs dans les expressions de $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, on trouvera

$$\begin{array}{l} x_{,} = \left(P_{,}.\varrho - \dfrac{1-\frac{1}{2}e^2}{R}\right).\sin A + \left[Q_{,}.\varrho - e.\sin(A-\omega)\right].\cos A, \\ y_{,} = -\left(P_{,}.\varrho - \dfrac{1-\frac{1}{2}e^2}{R}\right).\cos A + \left[Q_{,}.\varrho - e.\sin(A-\omega)\right].\sin A, \\ z_{,} = H_{,}.\varrho. \end{array}$$

Si l'on ajoute les carrés de ces valeurs, on aura

$$\frac{2}{r} = \frac{2}{R} - 1 - 2\varrho.\left[P_{,}.\frac{1-\frac{1}{2}e^2}{R} + Q_{,}.e\sin(A-\omega)\right] + \varrho^2.(P_{,}^2 + Q_{,}^2 + H_{,}^2), \quad (\alpha)$$

cette équation, jointe à l'équation ordinaire

$$r^2 = R^2 - \rho\,.\,(2R\cos c) + \rho^2, \qquad (6)$$

fournira toutes les données nécessaires pour la détermination des deux inconnues r et ρ.

15. Les formules qui servent à déterminer les valeurs des six quantités x, y, z, $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, sont donc parfaitement semblables, soit que l'on considère des observations équidistantes, ou des observations séparées par des intervalles de temps quelconques. Les coefficiens $F_{,}$, $G_{,}$, $H_{,}$ ou $P_{,}$, $Q_{,}$, $H_{,}$ seront seulement dans le second cas un peu plus compliqués que leurs analogues F, G, H ou P, Q, H. Quant aux quantités que nous avons désignées par $C_{1}{}^{o}$, C_{1}, $C_{1}{}'$, leurs valeurs peuvent se former très simplement; en effet, si dans la valeur de $C_{1}{}^{o}$, par exemple, on met pour C^{o} et $C_{,}^{o}$ les fonctions que ces lettres représentent, on a

$$\begin{aligned} C_{1}{}^{o} = &\tang b.[\sin(A - a') + \tfrac{2}{3}\theta_{,}{}''.\cos(A - a')] \\ &- \tang b'.[\sin(A - a) + \tfrac{2}{3}\theta_{,}{}''\cos(A - a)]. \end{aligned}$$

Or, il est évident que cette expression peut prendre cette forme

$$C_{1}{}^{o} = \tang b.\sin(A + \tfrac{2}{3}\theta_{,}{}'' - a') - \tang b'.\sin(A + \tfrac{2}{3}\theta_{,}{}'' - a), \quad (26)$$

puisque nous négligeons les termes dépendans du carré et des puissances supérieures de $\theta_{,}{}''$. La même observation s'applique aux valeurs de C_{1} et $C_{1}{}'$; il suffira donc de substituer $A + \frac{2}{3}\theta_{,}{}''$, au lieu de A dans les équations (C), n° 5, qui donneront alors immédiatement les valeurs des trois quantités $C_{1}{}^{o}$, C_{1}, $C_{1}{}'$. Quant à la partie $\frac{2}{3}\theta_{,}{}''$ ou $\frac{1}{3}.(\theta' - \theta)$, elle doit être exprimée en parties de l'arc que décrit dans un jour le moyen mouvement du Soleil. Pour faire cette réduction, on n'aura qu'à multiplier la quantité $\frac{1}{3}.(\theta' - \theta)$, donnée en jours et fractions décimales du jour temps moyen, par le nombre $\frac{360^{o}}{365,25638}$, ou, ce qui revient au même, au

logarithme de $\frac{1}{3}.(\theta' - \theta)$, on ajoutera le logarithme constant 3.5500072, et l'on aura la partie $\frac{1}{3}.(\theta' - \theta)$, exprimée en secondes.

Il est superflu de répéter ici l'observation que nous avons déjà faite sur la convergence des séries (m); nous ajouterons seulement que comme, dans les formules précédentes, nous avons regardé $\theta' - \theta$ comme une très petite quantité, il faudra que les intervalles de temps qui séparent les observations que l'on a choisies, quoique inégaux, ne soient pas très différens entre eux; on satisfera à cette condition et à celle du n° 10, en prenant des observations faites à cinq ou six jours de distance l'une de l'autre.

On pourra donc, pour former les données nécessaires à la détermination de l'orbite des comètes, se servir, selon qu'on le jugera convenable, de la première ou de la seconde méthode que nous venons d'exposer. Si la dernière entraîne dans des calculs plus compliqués, cet inconvénient est peut-être compensé par les opérations préliminaires d'interpolations auxquelles il faut recourir, lorsqu'on fait usage de la première, pour calculer des observations équidistantes. Il faut remarquer encore que, comme les observations factices qu'on obtient ainsi sont toujours moins exactes que des observations réelles, on doit attendre de la première méthode des résultats toujours plus incertains que ceux que donnera la seconde, qui a l'avantage de s'appliquer immédiatement aux données de l'observation.

16. Quelle que soit au reste la méthode que l'on emploie pour déterminer les six quantités $x, y, z, x_{,}, y_{,}, z_{,}$, il sera facile d'en conclure par les formules du

chap. V, livre II, les élémens de l'orbite de la comète. Pour cela, on commencera par former les trois quantités $xy_{,}-x_{,}y$, $xz_{,}-x_{,}z$, $yz_{,}-y_{,}z$. La première qui, multipliée par dt, représente l'aire que trace pendant cet instant la projection du rayon vecteur de la comète sur le plan de l'écliptique, fera connaître, selon qu'elle sera positive ou négative, si le mouvement de cet astre est direct ou s'il est rétrograde. On calculera ensuite la quantité $xx_{,}+yy_{,}+zz_{,}$, ou du moins on s'assurera du signe qu'elle doit avoir, parce que ce signe fait connaître si la comète a déjà passé par son périhélie ou si elle s'avance vers ce point. En effet, on a

$$\frac{dr}{dt}=\frac{xx_{,}+yy_{,}+zz_{,}}{r}.$$

Si la quantité $xx_{,}+yy_{,}+zz_{,}$ est négative, le rayon vecteur va en diminuant, et par conséquent la comète tend vers le périhélie; elle s'en éloigne au contraire si cette quantité est positive.

Si l'on nomme i l'inclinaison de l'orbite sur l'écliptique, et α la longitude de son nœud ascendant, le mouvement de la comète étant supposé direct, on aura, n° 29, livre II,

$$\left.\begin{array}{l} xy_{,}-x_{,}y=\cos i\,.\,\sqrt{2D},\\ xz_{,}-x_{,}z=\sin i\,.\cos\alpha\,.\,\sqrt{2D},\\ yz_{,}-y_{,}z=\sin i\,.\sin\alpha\,.\,\sqrt{2D}. \end{array}\right\}\quad(27)$$

On déterminera immédiatement par ces formules les valeurs de la distance périhélie D et les angles φ et α. On aura d'abord

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{yz_{,} - y_{,}z}{xz_{,} - x_{,}z},$$

$$\operatorname{tang} i = \frac{yz_{,} - y_{,}z}{(xy_{,} - x_{,}y) \cdot \sin \alpha}.$$

La tangente déterminée par la première formule convient également aux angles α et $180° + \alpha$. Pour savoir lequel des deux on doit choisir, on observera que les astronomes supposent que l'inclinaison i des orbites ne varie que depuis zéro jusqu'à 90°, c'est-à-dire que l'on compte cet angle dans des sens opposés, selon que le mouvement est direct ou rétrograde; l'angle i devant toujours par conséquent être positif et plus petit qu'un angle droit, cette condition détermine le signe de $\sin \alpha$, et par suite la valeur de α. Cet angle est la longitude du nœud ascendant si le mouvement de la comète est direct; c'est celle du nœud descendant si la comète se meut dans le sens contraire, et il faudra, dans ce cas, l'augmenter de deux angles droits pour avoir la longitude du nœud ascendant.

Lorsque les angles i et α seront connus, on aura la distance périhélie par la formule

$$D = \frac{(xy_{,} - x_{,}y)^2}{2 \cos^2 i}.$$

On pourrait d'ailleurs la déterminer indépendamment de ces angles par la formule

$$2D = (xy_{,} - x_{,}y)^2 + (xz_{,} - x_{,}z)^2 + (yz_{,} - y_{,}z)^2,$$

qu'on obtient en ajoutant entre elles les trois équations (27) après avoir élevé chaque membre au carré.

Connaissant la distance périhélie D et le rayon vecteur r, on calculera l'anomalie vraie v de la comète au moment de la seconde observation par l'équation

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} v = \frac{D}{r}.$$

On cherchera dans la table des comètes le temps T qui répond à cette anomalie, et en faisant ensuite

$$t = D^{\frac{3}{2}} . T,$$

on aura le temps t employé par la comète à parcourir l'anomalie v. Ce temps ajouté à l'époque de l'observation moyenne si la comète s'avance vers son périhélie, ou en étant retranché si elle s'en éloigne, donnera l'instant du passage par le périhélie. Il sera même encore plus simple de calculer directement le temps t par la formule du n° 26, livre II,

$$t = (2D^3)^{\frac{1}{2}} . (\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} v + \tfrac{1}{3} . \operatorname{tang}^3 \tfrac{1}{2} v), \quad (28)$$

en observant d'ajouter au logarithme de t le logarithme constant 1,7644179, qui est le complément de 8,2355821 pour que le temps t soit exprimé en jours moyens.

Enfin, pour déterminer la position du périhélie, on calculera d'abord la longitude héliocentrique φ de la comète par la formule,

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{y}{x},$$

en ayant soin de choisir entre les deux angles φ et

$180°+\varphi$, auxquels cette tangente convient également, celui qui rend $\sin\varphi$ de même signe que y et $\cos\varphi$ le même signe que x.

Ensuite, en désignant par $\mathcal{C}$ la distance angulaire de la comète au nœud dont la longitude est α, $\mathcal{C}$ sera l'hypoténuse d'un triangle sphérique dans lequel i est l'angle adjacent au côté $\varphi-\alpha$. On aura donc, pour la déterminer,

$$\text{tang}\,\mathcal{C}=\frac{\text{tang}\,(\varphi-\alpha)}{\cos i}, \qquad (29)$$

et la distance du périhélie au nœud ascendant augmentée de la longitude de ce nœud, ou ce que les astronomes appellent *le lieu du périhélie* sur l'orbite, sera $\alpha+\mathcal{C}+v$ si la comète s'avance vers son périhélie, ou $\alpha+\mathcal{C}-v$ si elle l'a déjà dépassé.

17. Tous les élémens de l'orbite se trouveront ainsi déterminés; mais comme on n'a employé pour cela que trois observations peu distantes entre elles, et que d'ailleurs beaucoup de termes ont été négligés dans les formules pour faciliter les calculs, on ne doit regarder ces élémens que comme une première approximation, et chercher à les corriger de manière à satisfaire le plus exactement possible à l'ensemble des observations connues. On a proposé pour y parvenir plusieurs méthodes dont l'esprit est le même, mais qui diffèrent en ce qu'elles emploient divers élémens de l'orbite supposée connue approximativement; celle que nous allons développer, et qui nous semble la plus simple, suppose que les premiers calculs ont donné d'une manière approchée la distance périhélie et l'in-

tant du passage de la comète par ce point. Il est utile par cette raison d'avoir le moyen de déterminer ces deux quantités indépendamment des autres élémens de l'orbite; c'est ce qu'on peut faire très simplement de la manière suivante. On a, n° 4,

$$s = \frac{rdr}{dt} = xx_{,} + yy_{,} + zz_{,}.$$

Cette équation, en substituant pour x, $x_{,}$, y, $y_{,}$, z et $z_{,}$ leurs valeurs n° 9, donnera

$$\begin{aligned} s = {} & \varrho^2 . [\mathrm{P} . \sin(\mathrm{A}-a) + \mathrm{Q} . \cos(\mathrm{A}-a) + \mathrm{H} . \operatorname{tang} b] . \cos b, \\ & - \varrho . \left\{ \left[\frac{1-\frac{1}{2}e^2}{\mathrm{R}} . \sin(\mathrm{A}-a) + e . \sin(\mathrm{A}-\omega) . \cos(\mathrm{A}-a) \right] . \cos b - \mathrm{QR} \right\} \\ & \quad - \mathrm{R} . e . \sin(\mathrm{A}-\omega). \end{aligned}$$

Si le signe de s est positif, la comète s'éloigne du périhélie; elle marche vers ce point si s est une quantité négative.

La valeur de s étant connue, on aura la distance périhélie D par l'équation

$$\mathrm{D} = r - \tfrac{1}{2} . s^2. \qquad (30)$$

On en conclura l'anomalie v par l'équation de la parabole,

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} v = \frac{\mathrm{D}}{r},$$

et l'on déterminera, au moyen de la table du mouvement des comètes, le temps employé à décrire l'angle v. On ajoutera ce temps à celui de l'époque si la comète s'approche de son périhélie, ou bien on l'en retranchera si elle s'en éloigne, et l'on aura l'instant du passage par le périhélie.

CHAPITRE II.

Correction des élémens de l'orbite déterminés par une première approximation.

18. Après avoir développé, avec tout le détail nécessaire, une méthode très simple pour arriver à une connaissance approchée des élémens de l'orbite de la comète, nous allons donner le moyen de corriger ces élémens avec toute la précision que les observations comportent.

Pour cela, on choisira trois observations éloignées entre elles, et au moyen des élémens résultant de la première approximation, on déterminera les trois anomalies v°, v, v' et les rayons vecteurs r°, r, r', qui se rapportent respectivement à l'époque de chaque observation. Il suffira, pour cela, de connaître à peu près la distance périhélie et l'instant du passage de la comète par ce point, et c'est en quoi consiste le principal avantage de cette méthode, qui n'emploie que deux des élémens de l'orbite pour les rectifier tous. On désignera par V et V' les angles que comprennent entre eux les rayons r°, r, r', en sorte qu'on aura $V = v - v^{\circ}$, et $V' = v' - v^{\circ}$; et en comparant ces quantités aux mêmes angles résultant de l'observation directe de la comète, la différence sera l'erreur due à l'incorrection des élémens employés.

Les observations, il est vrai, ne font pas connaître immédiatement ces angles, mais on peut les déduire très aisément des données qu'elles fournissent. En effet, on a, par chaque observation de la comète, sa longitude et sa latitude géocentriques, c'est-à-dire relatives à la Terre; on en conclura aisément, par la Trigonométrie, ses longitudes et ses latitudes héliocentriques, c'est-à-dire relatives au Soleil. Pour cela, désignons par S le Soleil, par T la Terre et par C la comète, et soit C' la projection de C sur le plan de l'écliptique. Si l'on considère la pyramide triangulaire interceptée entre ces quatre points, on aura d'abord STC' = long. ☉ — long. *comète*. En nommant, comme précédemment, b la latitude géocentrique de la comète, ce qui donne CTC' $= b$, on en conclura cos CTS = cos SC'T. cos b. Maintenant, dans le triangle rectiligne CTS, on connaît les deux côtés TS $=$ R et CS $= r$ qui sont les distances respectives de la Terre et de la comète au Soleil; on connaît de plus l'angle CTS opposé à r; on pourra donc calculer l'angle SCT par la formule

$$\sin \mathrm{SCT} = \frac{\mathrm{R}}{r} . \sin \mathrm{CTS}, \qquad (1)$$

et l'on en conclura le troisième angle CST du même triangle.

Cela posé, nommons λ la latitude et φ la longitude héliocentrique de la comète : en considérant la pyramide triangulaire CC'ST, on aura $\lambda =$ CSC' et l'on trouvera aisément

$$\sin \lambda = \frac{\sin b \ \sin \mathrm{CST}}{\sin \mathrm{CTS}}, \quad \text{et} \quad \cos \mathrm{C'ST} = \frac{\cos \mathrm{CST}}{\cos \lambda}. \quad (2)$$

L'angle C'ST étant donné par la dernière de ces formules, si l'on nomme A la longitude héliocentrique de la Terre, on aura

$$\phi = A + C'ST. \qquad (3)$$

On déterminera, de cette manière, les latitudes et les longitudes héliocentriques de la comète pour les trois époques données; voyons comment on en conclura les angles V et V'. Désignons par C°, C, C' les lieux respectifs de la comète correspondant aux trois observations, par $C_{\prime}^{\circ}$, $C_{\prime}$, $C'_{\prime}$, les projections de ces points sur l'écliptique, et considérons le triangle sphérique formé par les deux lieux C, C°, et par le pôle de l'écliptique. On connaît dans ce triangle les deux côtés de l'angle au pôle qui sont les complémens des latitudes héliocentriques $C^{\circ}SC^{\circ}_{\prime}$ et $CSC_{\prime}$, ainsi que l'angle compris qui a pour mesure l'arc $C^{\circ}_{\prime}C_{\prime}$ décrit du centre du Soleil; on aura donc pour déterminer le côté opposé $C^{\circ}C$, que nous désignerons par U, la formule

$$\cos U = \cos(\phi - \phi^{\circ}).\cos\lambda\cos\lambda^{\circ} + \sin\lambda\sin\lambda^{\circ}; \quad (h)$$

de même en supposant $C'C^{\circ} = U'$, on aura

$$\cos U' = \cos(\phi' - \phi^{\circ}).\cos\lambda^{\circ}\cos\lambda' + \sin\lambda^{\circ}\sin\lambda'.$$

Les deux angles U et U', correspondant à ceux que nous avons nommés V et V' et que nous avons obtenus par les formules directes du mouvement elliptique, on aura, si les élémens employés sont exacts,

$$V = U \quad \text{et} \quad V' = U'.$$

Mais, comme ces élémens ne sont qu'approchés, ces équations n'auront pas lieu rigoureusement, et pour que les valeurs de V et U, V′ et U′ puissent être égales, il faudra faire subir quelques corrections à ces élémens. Soient δV, $\delta V'$ δU et $\delta U'$ les variations correspondantes des angles V, V′, U, U′, on aura

$$V+\delta V=U+\delta U,\quad V'+\delta V'=U'+\delta U'.$$

Voici donc deux équations au moyen desquelles on pourra déterminer les corrections à faire à la distance périhélie et à l'époque du passage de la comète par ce point, pour satisfaire aux observations données; il ne s'agit que de développer ces équations.

19. Pour cela, reprenons les formules du mouvement parabolique

$$\left.\begin{aligned} r&=\frac{D}{\cos^2\frac{1}{2}v},\\ t&=D^{\frac{3}{2}}.\sqrt{2}.(\tang\tfrac{1}{2}v+\tfrac{1}{3}.\tang^3\tfrac{1}{2}v).\end{aligned}\right\}\quad(o)$$

Supposons que l'on fasse subir à la distance périhélie D, et à l'instant du passage par le périhélie, de très petites variations que nous désignerons par la caractéristique δ, en différenciant logarithmiquement les formules précédentes, on trouvera

$$\left.\begin{aligned} \frac{\delta r}{r}&=\frac{\delta D}{D}+\tang\tfrac{1}{2}v.\delta v,\\ \delta v&=\frac{\sqrt{2}D}{r^2}.\left[\frac{\delta t}{t}-\frac{3}{2}.\frac{\delta D}{D}\right].t.\end{aligned}\right\}\quad(o')$$

On aura par ces équations les variations du rayon vecteur et de l'anomalie correspondantes à celles que

subissent D et t. Il s'agit de déterminer maintenant les variations qu'éprouvent simultanément la latitude héliocentrique λ et la longitude héliocentrique φ. En différenciant logarithmiquement l'expression de sin λ trouvée plus haut, et en observant que les angles b et CTS ne varient pas, on aura

$$\delta\lambda = \text{tang}\,\lambda\,.\,\text{cot CST}\,.\,\delta\,.\,(\text{CST})\,;$$

en différenciant de même l'équation (2) on trouve

$$\delta\,.\,(\text{SCT}) = -\,\text{tang SCT}\,.\,\frac{\delta r}{r}\,,$$

et par suite

$$\delta\,.\,(\text{CST}) = -\,\delta\,.\,(\text{SCT}) = \text{tang SCT}\,.\,\frac{\delta r}{r}\,;$$

on aura donc enfin

$$\delta\lambda = \text{tang}\,\lambda\,.\,\text{tang SCT}\,.\,\text{cot CST}\,.\,\frac{\delta r}{r}. \qquad (a)$$

La longitude φ dépend de la formule

$$\cos \text{TSC}' = \frac{\cos \text{CST}}{\cos \lambda}\,;$$

en différenciant logarithmiquement, on en tire

$$\delta\,.\,(\text{TSC}') = \text{cot TSC}'\,.\,[\text{tang CST}\,.\,\delta\,.\,(\text{CST}) - \text{tang}\,\lambda\,.\,\delta\lambda]\,;$$

d'ailleurs $\delta\,.\,(\text{TSC}') = \delta\varphi$; on aura donc enfin

$$\delta\varphi = \text{cot TSC}'\,.\,\left(\text{tang CST}\,.\,\text{tang SCT}\,.\,\frac{\delta r}{r} - \text{tang}\,\lambda\,.\,\delta\lambda\right). \qquad (b)$$

On déterminera par les formules (a) et (b) les varia-

tions de la latitude et de la longitude héliocentriques, relatives aux époques des trois observations que l'on a choisies pour corriger l'orbite. Maintenant si, pour faciliter le calcul de l'angle U, on suppose un angle auxiliaire A déterminé par l'équation

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} A = \cos^2 \tfrac{1}{2} (\varphi - \varphi^\circ) \,.\, \cos \lambda^\circ \,.\, \cos \lambda,$$

ce qui donne en différenciant

$$\delta A = -\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} A . \left[\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (\varphi - \varphi^\circ) . (\delta\varphi - \delta\varphi^\circ) + \operatorname{tang} \lambda^\circ . \delta\lambda^\circ + \operatorname{tang} \lambda . \delta\lambda\right], \quad (\ldots$$

on aura

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} U = \cos \tfrac{1}{2} (\lambda + \lambda^\circ + A) \,.\, \cos \tfrac{1}{2} (\lambda + \lambda^\circ - A),$$

et par suite

$$\delta U = -\tfrac{1}{2} . \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} U . \left\{ \begin{matrix} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (\lambda + \lambda^\circ + A)(\delta\lambda + \delta\lambda^\circ + \delta A) \\ + \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (\lambda + \lambda^\circ - A)(\delta\lambda + \delta\lambda^\circ - \delta A). \end{matrix} \right\} \quad (c)$$

En substituant dans cette équation pour $\delta\lambda$, $\delta\lambda^\circ$ et δA, leurs valeurs précédentes, on aura celle de δU exprimée en fonction de δD et de δa. On déterminera de la même manière δV, en observant que l'on a $\delta V = \delta v - \delta v^\circ$, et que δv et δv° sont données par la seconde des formules (o'). On aura donc entre les variations δD et δt deux équations de cette forme :

$$\left. \begin{aligned} \delta U &= m . \delta D + n . \delta t, \\ \delta V &= p . \delta D + q . \delta t; \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

d'où, en observant qu'on a $\delta U - \delta V = V - U$, on tire

$$(m - p) . \delta D + (n - q) . \delta t = V - U. \quad (e)$$

On trouvera une équation semblable en combinant la première observation avec la troisième; on aura donc deux équations qui ne renfermeront d'inconnues que les variations δD et δt, et qui suffiront par conséquent pour les déterminer. Si le calcul était exact, on aurait ainsi immédiatement les valeurs de la distance périhélie et de l'époque du passage qui satisfont le plus exactement possible aux trois observations données; mais comme on a négligé dans la formation de l'équation (*e*) les quantités du second ordre, il faudra, à l'aide des élémens corrigés, recommencer les calculs précédens, et l'on déterminera ainsi les corrections de ces nouveaux élémens. Dans certains cas, on sera même obligé de répéter une troisième fois ces opérations; mais elles n'ont rien d'embarrassant, et le calcul des premières corrections facilitera celui des suivantes.

20. Quand on sera ainsi arrivé à une connaissance suffisamment exacte de la distance périhélie et du temps du passage, voici comment on déterminera avec le même degré de précision les autres élémens de l'orbite. On substituera dans les équations (*a*) et (*b*) pour δt et δD leurs valeurs résultantes des dernières opérations, et l'on en conclura les valeurs exactes de la longitude et de la latitude héliocentriques de la comète pour les époques des observations données.

Si l'on compare ensuite entre elles la première et la dernière, on aura pour déterminer l'inclinaison i de l'orbite de la comète et la longitude α de son nœud sur le plan de l'écliptique, les deux formules

$$\cos i = \frac{\sin(\varphi - \varphi^\circ)}{\sin(\nu - \nu^\circ)} \cdot \cos\lambda \cdot \cos\lambda^\circ,$$
$$\sin(\varphi - \alpha) = \tang\lambda \cdot \cot i.$$

Dans la première de ces formules, il faut avoir soin de prendre l'angle $\nu - \nu^\circ$ de même signe que $\varphi - \varphi^\circ$, parce que l'inclinaison i est toujours supposée moindre que 90°. La seconde donnera pour l'angle $\varphi - \alpha$ deux valeurs comprises entre 0 et 180°, et il en résultera par conséquent deux valeurs de α. Pour déterminer laquelle il faut choisir, on remarquera que par la première observation, on a pareillement $\sin(\varphi^\circ - \alpha) = \tang\lambda^\circ \cdot \cot i$; on prendra donc la moyenne entre les valeurs correspondantes de α, et l'on saura, par ce qui a été dit n° 16, si c'est au nœud ascendant ou au nœud descendant de l'orbite que cette longitude se rapporte.

Le signe de $\varphi - \varphi^\circ$ indiquera, selon qu'il sera positif ou négatif, si le mouvement de la comète est direct ou s'il est rétrograde. Enfin on aura le lieu du périhélie sur l'orbite par la formule (29) du n° 16.

21. La méthode que nous venons de donner pour corriger, par les formules différentielles, les élémens de l'orbite qui résultent d'une première approximation, est très exacte et très sûre, mais les calculs qu'elle exige demandent quelque attention; celle qu'on trouve dans la *Mécanique céleste* a l'avantage d'être, pour ainsi dire mécanique, les mêmes calculs se reproduisant toujours pendant toute l'opération. Voici en quoi elle consiste. On suppose connus à peu près la distance

périhélie et l'instant du passage par ce point, et en partant de ces élémens et des observations, on détermine, comme on l'a vu plus haut, les différences d'anomalies de la première à la deuxième observation, et de la première à la troisième. Soient U et U′ ces deux angles ; en les comparant aux mêmes différences d'anomalies que donnent immédiatement les deux élémens approchés, et que nous désignons par V et V′, on aura

$$U - V = m, \quad U' - V' = m'.$$

On fera varier d'une très petite quantité la distance périhélie, et l'on calculera les mêmes résultats dans cette seconde hypothèse. Soient n et n' ce que deviennent alors les quantités m et m' ; enfin, en conservant la distance périhélie de la première hypothèse, on altérera un peu l'instant du passage au périhélie, et l'on calculera encore les angles U—V et U′—V′. Dans cette troisième hypothèse, désignons par p et p' ces angles, et soient u et t les nombres par lesquels il faudrait multiplier les deux variations supposées dans la distance périhélie et dans l'instant du passage pour avoir les véritables, on aura les deux équations suivantes

$$\left.\begin{array}{l}(m - n).u + (m - p).t = m, \\ (m' - n').u + (m' - p').t = m'.\end{array}\right\} \quad (d)$$

On tirera de là les valeurs de u et t, et l'on aura par conséquent les corrections de la distance périhélie et de l'instant du passage de la comète en ce point. Si les valeurs qui en résulteront n'étaient pas suffisamment exactes, on recommencerait avec ces deux

élémens corrigés les calculs précédens, et, après quelques essais, on parviendrait à connaître la vraie distance périhélie et l'instant du passage au périhélie qui répondent aux observations données.

22. Si l'on voulait déterminer l'orbite avec encore plus de précision, au lieu d'employer dans le calcul des corrections de la distance périhélie et de l'instant du passage, trois observations seulement, on choisirait, parmi les observations de la comète, celles que l'on supposerait les plus exactes, et en les comparant deux à deux, on formerait un système d'équations semblables aux équations (d) ou aux équations (e). On combinerait ensuite ces équations de la manière la plus avantageuse pour en tirer les valeurs des quantités qui doivent servir à la correction des élémens de la première approximation, et l'on déterminerait ainsi l'orbite qui satisfait le plus exactement possible à l'ensemble des observations connues de la comète.

Il peut arriver dans certains cas que, malgré les précautions que nous venons d'indiquer, l'orbite corrigée ne représente qu'assez imparfaitement encore les résultats de l'observation; c'est qu'alors sans doute le mouvement de la comète n'a pas lieu dans une parabole, comme nous l'avons supposé, et que son orbite est elliptique ou hyperbolique. Cette dernière espèce d'orbites intéresse peu l'Astronomie. Quant aux élémens de l'orbite elliptique, on peut les déterminer par une méthode d'approximation semblable à celle du n° 21, lorsqu'on a déterminé par les méthodes précédentes la parabole qui représente à à peu près le mouvement de la comète. Pour cela,

on choisit quatre observations exactes qui embrassent toute la partie visible de l'orbite, et l'on calcule les angles V et U relatifs à ces observations dans quatre hypothèses, d'abord en employant les élémens approchés de l'orbite parabolique, ensuite en faisant varier la distance périhélie; troisièmement en changeant seulement l'instant du passage, et enfin, en conservant la distance périhélie et l'instant du passage de la première hypothèse et en supposant une orbe elliptique très allongée, en sorte que la différence $1 - e$ de son excentricité à l'unité soit une très petite fraction. Les formules du n° 26, liv. II, serviront, dans ce cas, à déterminer le rayon vecteur r et l'anomalie v correspondans à chaque observation. Cela posé, en nommant respectivement u, t, s les nombres par lesquels il faut multiplier les variations supposées dans la distance périhélie dans l'instant du passage, et la quantité $1 - e$, pour avoir leurs véritables valeurs, on formera trois équations semblables aux équations (d) qui renfermeront chacune ces trois inconnues, et qui serviront à les déterminer.

Nous ne faisons qu'indiquer ici cette méthode, parce que les résultats qu'elle donne laisseront toujours beaucoup d'incertitude sur la durée de la révolution de la comète qui est surtout importante à connaître, et que le seul moyen certain de la déterminer est d'attendre que l'on ait observé un nouveau passage de cet astre à son périhélie.

Pour faciliter l'usage des méthodes que nous venons d'exposer, nous allons en faire l'application à deux comètes, dont l'apparition a été assez longue pour

fournir un nombre d'observations suffisant à la détermination exacte de leurs orbites.

Détermination de l'orbite de la comète de 1824.

23. Parmi les observations connues de cette comète, nous avons choisi les suivantes. Les époques sont évaluées en temps moyen à Paris, compté de minuit.

Août.	Longitudes observées.	Latitudes observées.
$16^j,93308$,	$a^{\circ}\ 237^{\circ}\ 27'\ 12''$,	$b^{\circ}\ 55^{\circ}\ 19'\ 43''$ B.
22,90153,	a 230.31.33,	b 57.42.22,
28,87972,	224. 6.30,	59.33.58.

On a calculé au moyen des tables du Soleil la longitude et le rayon vecteur de cet astre pour l'époque de l'observation du 22 août, et l'on a eu

long. du ☉ + 180°,	log. R,
A. 329° 38′ 37″,	0.0046329.

Ensuite, pour faire usage de la méthode exposée n° 5, et avoir des observations équidistantes, on a déterminé la longitude et la latitude de la comète pour l'époque du 28^août^,86998, au moyen de la formule d'interpolation connue

$$z = \frac{(m+p)(n+p)}{mn}\cdot a - \frac{p(n-p)}{m(m+n)}\cdot a^{\circ} + \frac{p(m-p)}{n(m+n)}\cdot a',$$

dans laquelle a°, a, a' sont trois longitudes ou trois latitudes observées aux temps $t-m$, t, $t+n$ respectivement, et z la longitude ou la latitude corres-

pondante à un temps quelconque $t+p$ intermédiaire entre ceux-là.

On a trouvé ainsi, en employant les trois observations précédentes,

Août.	Longitude interpolée.	Latitude interpolée.
28.86998,	a' 224°7′6″,	b' 59°33′49″.

Au moyen de ces valeurs et de celles que renferme le premier tableau, on aura les suivantes

$$\theta = 5^j{,}96845, \quad A - a^\circ = 92^\circ\ 11'\ 25'',$$
$$A - a = 99.\ 7.\ 4,$$
$$A - a' = 105.31.31.$$

Au logarithme de θ on ajoutera le logarithme constant 8.2355821, ce qui donne

$$\log.\ \theta = 9.0114437.$$

Cela posé, on commencera par calculer les trois quantités C°, C et C′ au moyen des formules (C), n° 5. On aura d'abord

sin(A—a')...	9.9838573	sin(A—a)...	9.9944776
tang b...	0.1992660	tang b'	0.2309548
	0.1831233		0.2254324
nombres +	1.524485		— 1.680476
			+ 1.524485
		C° =	— 0.155991.

On trouverait de la même manière,

$$C = 0.307764, \quad C' = -0.155602.$$

A l'aide de ces valeurs, on formera celles des quantités P, Q, H, qu'on calculera par les formules du n° 9; on aura d'abord

$$\frac{\cos b}{C\theta} = 16.908250,$$

et ensuite

$\log C^{\circ}$	...9.1930996	$\log C'$	.....9.1863969
$\sin(A-a^{\circ})$	...9.9996826	$\sin(A-a')$	...9.9838573
$\log.\frac{\cos b}{C\theta}$	...1.2280986	$\log.\frac{\cos b}{C\theta}$	...1.2280986
	0.4208808		0.3983528
nomb.	-2.635608		$+2.502377$
	$+2.502377$		
	$P = -0.133231.$		

On calculera de même les quantités Q et H, et l'on aura $P = -0.133231$, $Q = -0.594359$, $H = 0.607135$.

Les quantités $\frac{1-\frac{1}{2}e^2}{R}$ et $e \sin(A-\omega)$ se détermineront par la méthode exposée n° 8, et $\cos c$ par l'équation $\cos c = -\cos(A-a).\cos b$. On aura ainsi

$$\frac{1-\frac{1}{2}e^2}{R} = 0.989249, \quad e\sin(A-\omega) = -0.0128622, \quad \cos c \ldots 8.9276863;$$

et les deux équations (18) et (19) deviendront en y substituant ces valeurs

$$\left.\begin{aligned} r^2 &= (1.021565) - a\varrho + \varrho^2 \\ \frac{1}{r} &= (0.489389) + b\varrho + c\varrho^2 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &a \ldots 0.171139 \\ &b \ldots 0.124153 \\ &c \ldots 9.369813. \end{aligned}$$

Pour résoudre ces équations, on fera sur les valeurs de ρ et de r une première hypothèse, dans laquelle on sera dirigé par les remarques du n° 7; on substituera ensuite $r + \delta r$ et $\rho + \delta\rho$ dans les équations précédentes, et en négligeant les carrés des corrections très petites δr et $\delta\rho$, on aura entre ces quantités deux équations du premier degré qui serviront à les déterminer; on parviendra ainsi, après quelques essais, aux vraies valeurs de r et de ρ. On a trouvé de cette manière

$$r = 1.226585,$$
$$\rho = 0.785761,$$

d'où l'on a conclu, au moyen de la formule du n° 17,

$$s = -0.565382.$$

Cette valeur étant négative, il s'ensuit que le 22 août la comète n'avait pas encore atteint son périhélie. Il en résulte pour la distance périhélie

$$D = r - \tfrac{1}{2}s^2 = 1.066610,$$

ce qui donne pour l'anomalie correspondante à l'observation moyenne

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} v = \frac{D}{r} = 9.9393039,$$

et par conséquent $v = 42^\circ 20' 32''$.

On trouvera par la table des comètes ou par la formule (28) que le nombre de jours que met la comète à décrire cet angle est de 36,8269, et ce temps ajouté à l'époque de l'observation moyenne, donnera pour l'instant du passage au périhélie, sept. $28^j,7284$.

5..

Connaissant ainsi à peu près la distance périhélie et l'instant du passage de la comète en ce point, on pourra s'occuper immédiatement de la recherche de sa véritable orbite, par les méthodes des nos 19 et 21.

Détermination de l'orbite de la seconde comète de 1805.

24. Nous nous proposons de calculer l'orbite de cette comète en employant trois observations séparées par des intervalles de temps inégaux, afin de donner un exemple de l'emploi des formules contenues dans le n° 14. Nous avons choisi la comète de 1805, parce que son orbite a déjà été calculée par plusieurs autres méthodes, et qu'en comparant leurs résultats aux nôtres, on pourra mieux juger du degré de précision auquel nous atteindrons.

Voici trois observations de cette comète, corrigées de l'aberration et de la parallaxe, et évaluées en temps moyen compté de minuit à Paris :

Époques.		Longit. observées.	Latit. observées.
Novemb.	23j,32241	$a^{\circ}.24^{\circ}41'\ 4''$	$b^{\circ}.27^{\circ}25'35''$
	30,51095	$a.15.39.40$	$b.19.25.28$
Décemb.	5,29581	$a'.\ 2.\ 7.11$	$b'.\ 3.20.45.$

Les tables de Delambre ont donné la longitude et le rayon vecteur du Soleil correspondant à l'observation moyenne, et l'on a trouvé

lieu du $\odot + 180^{\circ}$,	log. R,
$A.68^{\circ}25'41''$,	9.9936673.

Dans cet exemple, on a $\theta = 7.18854$, $\theta' = 4.78486$, en ajoutant aux logarithmes de ces quantités, le logarithme constant 8.2355821, on forme les suivantes :

$$\log.\theta = 9.0922228, \quad \log.\theta'' = \log.\frac{\theta+\theta'}{2} = 9.0127696,$$

$$\log.\theta' = 8.9154514, \quad \log.\theta''_{,} = \log.\frac{\theta-\theta'}{2} = 8.3154287.$$

Si au logarithme de $\theta'-\theta$ on ajoute le logarithme constant 3.5500073, on aura l'arc correspondant du moyen mouvement du Soleil exprimé en secondes; on trouve ainsi $\frac{\theta'-\theta}{3} = -47'-23''$. En joignant cette valeur aux quantités renfermées dans le tableau précédent, et en faisant, pour abréger, $A + \frac{2}{3}\theta''_{,} = A_{,}$, on formera les suivantes :

$A-a^{\circ}$ ... 43° 44′ 37″,	$A_{,}-a^{\circ}$ ... 42° 57′ 14″,	$a^{\circ}-a$ ... 9° 1′ 24″,
$A-a$ ... 52.46. 1,	$A_{,}-a$ ... 51.58.38,	$a-a'$ ... 13.32.29,
$A-a'$ ... 66.18.30,	$A_{,}-a'$ ... 65.31. 7,	$a^{\circ}-a'$ ... 22.33.53.

Cela posé, on commencera par calculer les trois quantités $C^{\circ}_{,}$, $C_{,}$, $C'_{,}$, comme nous l'avons expliqué n° 15, c'est-à-dire au moyen des formules (C), dans lesquelles on changera simplement A en $A_{,}$; on trouvera ainsi

$$C^{\circ}_{,} = 0.2748775, \quad C_{,} = -0.4324441, \quad C'_{,} = +0.1685105;$$

d'où l'on conclura

$$\frac{\cos b}{\theta\theta' C_{,}} = -214.2618.$$

La quantité D se calcule par la formule (D), et l'on trouve

$$D = 0.0046390.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans les équations (25), on aura

$$P_, = -2.314020,\ Q_, = -4.026273,\ H_, = -3.605632;$$

on forme d'ailleurs aisément les quantités suivantes qui entrent dans les équations (α) et ($\mathfrak{C}$), n° 14,

$$\frac{1-\frac{1}{2}e^2}{R} = 1.014545,\ e\sin(A-\omega) = 0.0086865$$

$$(2R\cos c) = -1.124717.$$

Au moyen de ces valeurs, les deux équations à résoudre pour la solution du problème deviendront

$$r^2 = (0.971258) + (1.124717).\rho + \rho^2,$$
$$\frac{1}{r} = (0.5146883) + (2.382646).\rho + (17.283034).\rho^2,$$

d'où l'on tire, après quelques essais,

$$r = 1.048785,$$
$$\rho = 0.104679.$$

Les formules (20) donneront ensuite

$$\begin{aligned} x &= 1.045256, & x_, &= -0.430153, \\ y &= -0.078599, & y_, &= 1.256774, \\ z &= 0.034812, & z_, &= -0.377434, \end{aligned}$$

d'où l'on conclura

$$\log.(xy_{,}-x_{,}y)=0.1071562,$$
$$\log.(y_{,}z-yz_{,})=8.1487631,$$
$$\log.(x_{,}z-xz_{,})=9.5792583.$$

Le signe de la quantité $xy_{,}-x_{,}y$ étant positif, on en conclut d'abord que le mouvement de la comète est direct. Si l'on nomme α la longitude de son nœud et i l'inclinaison de son orbite sur l'écliptique, on aura

$$\tang \alpha=\frac{yz_{,}-y_{,}z}{xz_{,}-x_{,}z}=8.5695048,$$

ce qui donne $\alpha=2^{\circ}\,7'\,31''$, ou bien $\alpha=182^{\circ}\,7'\,31''$; on trouvera ensuite

$$\tang i=\frac{xz_{,}-x_{,}z}{(xy_{,}-x_{,}y).\cos\alpha}=9.4724010,$$

et comme $\tang i$ doit toujours être une quantité positive, on aura

$$i=16^{\circ}\,31'\,43'',\quad \alpha=182^{\circ}\,7'\,31'',$$

et α sera, n° 18, la longitude du nœud ascendant de l'orbite sur le plan de l'écliptique. La distance périhélie se déterminera par la formule

$$D=\tfrac{1}{2}.\left(\frac{xy_{,}-x_{,}y}{\cos i}\right)^{2}=0.891122.$$

En calculant directement cette valeur par la formule (30), on a trouvé $D=0.891121$, résultat qui diffère très peu du précédent.

De là on conclut l'anomalie correspondante à l'observation moyenne par la formule

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} v = \frac{D}{r} = 9.9290507,$$

ce qui donne $v = 45° 37' 32''$.

Le temps que la comète emploie à décrire cette anomalie se détermine par la formule

$$t = (2D^3)^{\frac{1}{2}} . (\tang \tfrac{1}{2} v + \tfrac{1}{3} . \tang^3 \tfrac{1}{2} v) . [1.7644179].$$

En substituant pour D et v leurs valeurs, on trouve

$(2D^3)^{\frac{1}{2}}$....	0.0754208	
$\tang \frac{1}{2} v$...	9.6238938	
	1.7644179	
	1.4637325.....	29ʲ,08924
$\frac{1}{3} \tang^2 \frac{1}{2} v$...	8.7706663	
	0.2343988.....	1,71532
		t....30.80456.

Le temps t est l'intervalle qui s'écoule entre l'instant de l'observation moyenne et celui du passage de la comète au périhélie. Pour savoir quelle est celle des deux époques qui a précédé l'autre, il faut calculer la quantité s ou seulement déterminer son signe par la formule

$$s = xx_{,} + yy_{,} + zz_{,}.$$

Ici s est négatif, et il en résulte par conséquent que la comète s'avance vers son périhélie. En ajoutant donc à l'époque de l'observation moyenne, c'est-à-dire au 30,51095 novembre, l'intervalle de 30ʲ,80456, on aura, pour l'instant du passage au périhélie, le 31,31551 décembre.

Déterminons enfin la position du périhélie sur l'orbite; on aura

$$\tang \varphi = \frac{y}{x} = -(8.8761980),$$

d'où l'on conclut, n° 16,

$$\varphi = 355^\circ 41' 59'';$$

on aura ensuite

$$\tang \sigma = \frac{\tang(\varphi - \alpha)}{\cos i} = -(9.0699415),$$

ce qui donne $\sigma = 173^\circ 18'$, et l'on aura, par conséquent, pour le lieu du périhélie sur l'orbite

$$\alpha + \sigma + \nu = 41^\circ 3' 3''.$$

En réunissant les diverses quantités que nous venons de trouver, et ajoutant 68° 25′ 41″, ou l'angle A, à la longitude du nœud et à celle du périhélie, pour que ces longitudes soient rapportées comme à l'ordinaire à la ligne des équinoxes, on aura, pour les élémens de l'orbite,

Passage au périhélie.... décembr.	31ʲ,31551,
Distance périhélie...........	0.891122,
Lieu du nœud ascendant.....	250° 33′ 12″,
Inclinaison	16.31.43,
Lieu du périhélie..........	109.28.44,
Sens du mouvement direct.	

Rectification des élémens de l'orbite de la comète de 1824.

25. Nous nous proposons maintenant d'appliquer à la comète de 1824, la méthode que nous avons donnée pour arriver à une connaissance exacte des élémens de l'orbite d'une comète, lorsqu'on connaît à peu près la distance périhélie et le temps du passage au périhélie.

Nous avons choisi, pour corriger ces deux élémens, les trois observations suivantes :

Époques.		Longitudes observées.	Latitudes observées.
Août....	4,9275	a° 252° 32′ 28″	b° 48° 7′ 30″,
	22,9514	a.230.34.49	b.57.44.23,
Septembr.	3,9100	a' 218. 4.54	b' 61. 4.20.

Les lieux du Soleil correspondant aux mêmes époques et calculés par les tables de Delambre donnent

Longitude ☉.	log. R.
132° 21′ 58″	0.0060678
149.41.30	0.0046284
161.15.54	0.0033786.

Supposons que par les premiers essais on ait trouvé pour la distance périhélie 1.04598 et pour l'époque du passage le 28^{sept},3153; calculons avec ces élémens approchés les angles U, V, U′ et V′ par la méthode exposée n° 18. Voici le détail de ce calcul :

Pas. pér. sept.	28,3153	t..	1.7355015	v^b = 58° 30′ 13″8	
Ep. don. août.	4,9275	D$^{\frac{3}{2}}$.	0.0291351	$\cos\frac{1}{2}v^o$.	9.9407553
t. =	54^j,3878	T..	1.7063664		
		T =	50^j,8588		

D....	0.0194234	long. ☉...	132° 21′ 58″
$\cos^2\frac{1}{2}v^o$..	9.8815106	long. comèt.	252.32.28
r^o....	0.1379128	élong. C′TS =	120° 10′ 30″
cos C′TS..	9.7012595		
cos b^o....	9.8244563		
cos CTS..	9.5257158	CTS..	109° 36′ 14″
sin CTS..	9.9740669	SCT..	44. 3.27
R^o....	0.0060678		153° 39′ 41″
1 : r^o....	9.8620872	CST..	26° 20′ 19″
sin SCT..	9.8422219		
sin CST..	9.6470652		
sin b^o.	9.8719247		
1 : sin CTS.	0.0259331		
sin λ^o..	9.5449230	lat. hélio. λ^o..	20° 31′ 46″
cos CST..	9.9523989		
cos λ^o..	9.9715041	commut. C′ST.	16° 52′ 15″
cos C′ST..	9.9808948	long. de la Ter.	312.21.58
		long. hélio. φ^o.	295° 29′ 43″

Nous venons de déterminer, par ce calcul, l'anomalie, la longitude et la latitude héliocentriques de la comète relatives à l'instant de l'observation du 4 août; en répétant les mêmes opérations, par rapport aux époques du 22 août et du 3 septembre, on parviendra aux résultats suivans :

$v^0 = 58^\circ 30' 13''8$, $v = 42^\circ 56' 17''3$, $v' = 30^\circ 19' 20''3$,
$\varphi^0 = 295.29.43$, $\varphi = 306.59.52$, $\varphi' = 318.13.\ 4$,
$\lambda^0 = 20.31.46$, $\lambda = 31.45.33$, $\lambda' = 40.14.45$.

Ces valeurs donneront, en comparant les deux dernières observations à celle du 4 août,

$$v^0 - v = 15^\circ 33' 39'', \quad \varphi - \varphi^0 = 11^\circ 30'\ 9'',$$
$$v^0 - v' = 28.10.54, \quad \varphi' - \varphi^0 = 22.43.21,$$

et au moyen de la formule (4), on en conclura

$\cos(\varphi-\varphi^0)$.	9.9911888		
$\cos\lambda^0$..	9.9715041	$\sin\lambda^0$..	9.5449230
$\cos\lambda$...	9.9295557	$\sin\lambda$..	9.7212730
	9.8922488		9.2661960
nomb.	+0.780277		+0.184585
			+0.780277
		$\cos U$	+0.964862 log. 9.9844652.

On aura donc

U. . .	$15^\circ 14' 2''$		
V. . .	15.33.39		
V—U. . .	$19' 37''$	m. . .	$+ 1177''$.

On trouverait de même

U'. . .	$27^\circ 38' 16''$		
V'. . .	28.10.54		
V'—U'. . .	$32' 38''$	m'. . .	$+ 1958''$.

26. Supposons maintenant que l'on fasse varier d'une petite quantité la distance périhélie et l'instant du

sage, et déterminons les variations correspondantes des angles U, V, U', V'. Les calculs qui ont vi à former ces angles fourniront toutes les nnées nécessaires à cette nouvelle recherche. On a d'abord par la seconde des formules (o'),

$$\delta v^{\circ} = (2718''). \delta t - (212067''). \delta D,$$
$$\delta v = (3513''). \delta t - (183250''). \delta D,$$
$$\delta v' = (4069''). \delta t - (142464''). \delta D,$$

par la première des mêmes formules, en convertant tous les termes en secondes,

$$\frac{\delta r^{\circ}}{r^{\circ}} = (1522''). \delta t + (78470''). \delta D,$$
$$\frac{\delta r}{r} = (1382''). \delta t + (125165''). \delta D,$$
$$\frac{\delta r'}{r'} = (1103''). \delta t + (158640''). \delta D.$$

La formule (a) donnera ensuite

$$\delta \lambda^{\circ} = (0.73191). \frac{\delta r^{\circ}}{r^{\circ}},$$
$$\delta \lambda = (1.1835). \frac{\delta r}{r},$$
$$\delta \lambda' = (1.4448). \frac{\delta r'}{r'},$$

par la formule (b), on aura

$$\delta \varphi^{\circ} = -(0.67584). \frac{\delta r^{\circ}}{r^{\circ}},$$
$$\delta \varphi = -(1.1059). \frac{\delta r}{r},$$
$$\delta \varphi' = -(1.2466). \frac{\delta r'}{r'}.$$

En recommençant avec ces données les calculs précédens, on trouvera

U...	15° 14′ 0″	U′...	27° 36′ 36″
V...	15.20.23	V′...	27.48′.22
V—U...	6′ 23″	V′—U′...	11′ 46″
$p = + 383''$,		$p' = + 706''$.	

Au moyen des valeurs de m, m', n, n', p et p', on formera les suivantes :

$m-n = -1212''$, $m-p = +794''$, $m'-n' = -2963''$, $m'-p' = +1252''$,

et l'on aura à résoudre ces deux équations

$$-1212.u + 794.t = 1177,$$
$$-2963.u + 1252.t = 1958,$$

d'où l'on tire

$$u = -0.097040, \quad t = +1.33423.$$

En multipliant respectivement, par ces deux quantités, les variations -0.04 et $+1^j$, que nous avons supposées à la distance périhélie et à l'époque du passage, on aura, pour les variations véritables de ces élémens,

$$\delta D = +0.0038816, \quad \delta t = +1^j,33423,$$

d'où l'on conclura, pour la distance périhélie et l'instant du passage au périhélie corrigés,

D = 1.049862, inst. du pass. sept. $29^j,6495$.

En calculant avec ces élémens les angles U, V, U′, V′, on aura

$$\begin{array}{llll} U\ldots & 15^\circ\, 14'\, 44'', & U'\ldots & 27^\circ\, 37'\, 44'', \\ V\ldots & 15.14.10, & V'\ldots & 27.36.26, \\ \hline U-V\ldots & 34'', & U'-V'\ldots & 1'\, 18''. \end{array}$$

On ferait disparaître entièrement ces différences, en augmentant un peu la distance périhélie et en avançant l'époque du passage; mais comme elles ne s'élèvent guère à plus d'une minute, nous ne pousserons pas plus loin cette recherche, et nous déterminerons, d'après la distance périhélie et l'instant du passage précédent, tous les élémens de l'orbite. Le calcul que nous venons de faire des angles U, V, U′, V′ a donné

$$\begin{array}{l|l|l} v^\circ = 59^\circ\, 15'\, 30'' & v = 44^\circ\, 1'\, 20'' & v' = 31^\circ\, 39'\, 4'' \\ \lambda^\circ = 21.\ 0.\ 2 & \lambda = 32.31.\ 9 & \lambda' = 41.\ 5.\ 4 \\ \varphi^\circ = 295.\ 3.32 & \varphi = 306.16.47 & \varphi' = 317.29.\ 1. \end{array}$$

En combinant entre elles les valeurs qui se rapportent à la première et à la dernière observation, parce que ce sont celles qui donnent aux numérateurs et aux dénominateurs des formules du n° 20, les plus grands nombres et dont on doit attendre, par conséquent, le plus d'exactitude, on trouve

$$i = 54^\circ 36'\ 6'', \qquad \alpha = 279^\circ\, 13'\, 44''.$$

i est l'inclinaison de l'orbite, et le mouvement de la comète étant direct, α est la longitude du nœud ascendant. En nommant σ la distance de la comète à ce nœud, à l'époque de la première observation, on trouve par la formule (29), n° 16,

$$\sigma = 26° \, 4' \, 45'',$$

d'où l'on conclura, pour le lieu du périhélie sur l'orbite,

$$\nu + \sigma + \alpha = 4° \, 33' \, 59''.$$

Les élémens de l'orbite de la comète de 1824 seront donc

Passage au périhélie, septembre. . .	29^j,6495
Distance périhélie.	1.049862
Lieu du périhélie sur l'orbite.	4° 33′ 59″
Longitude du nœud ascendant. . . .	279.13.44
Inclinaison de l'orbite.	54.36. 6.

Sens du mouvement direct.

CHAPITRE III.

rbations du mouvement elliptique des Comètes.

Les comètes sont, comme les planètes, assujet-
des perturbations qui altèrent leur mouvement
que autour du Soleil, et qui font varier par de-
es élémens de leurs orbites. Ces perturbations
n général beaucoup plus considérables pour les
es que pour les planètes, et elles sont surtout
les dans la durée des révolutions. Leur déter-
ion doit dépendre évidemment des mêmes prin-
que celle des inégalités planétaires, puisqu'elles
nt de la même cause, et la méthode exposée
livre II, qui consiste à exprimer l'effet des
perturbatrices par la variation des constantes
aires qui entrent dans les formules du mouve-
elliptique, paraît être encore dans cette question
s appropriée à la nature du problème. On dé-
ie, en effet, très simplement de cette manière
riations différentielles de chacun des élémens
bite, et il ne s'agit plus que d'intégrer ces for-
pour avoir tous les élémens du mouvement
comète dans son orbite troublée. Malheureu-
it cette intégration présente de grandes diffi-

6..

cultés. Les excentricités des orbites des comètes étant en général très considérables, et leurs inclinaisons à l'écliptique variant à l'infini, il n'est plus possible de développer la fonction perturbatrice en série convergente ordonnée par rapport aux puissances ascendantes de ces quantités, et il faut renoncer à l'avantage d'avoir, pour déterminer les inégalités des comètes, des formules qui, comme celles des perturbations planétaires, embrassent un nombre indéfini de leurs révolutions et ne demandent que des substitutions numériques pour donner les résultats cherchés. Pour intégrer les formules différentielles des élémens de l'orbite troublée, on est obligé ici de recourir aux méthodes d'approximation connues sous le nom de *quadratures mécaniques*. Ces méthodes consistent à partager la courbe décrite par la comète en portions très petites, par rapport auxquelles on détermine les altérations produites par les forces perturbatrices sur chacun des élémens de l'orbite; différentes formules donnent ensuite le moyen d'en conclure les variations totales de ces élémens dans l'intervalle compris entre les deux extrémités de l'arc de trajectoire que l'on a considéré. On peut déterminer de cette manière les altérations des élémens de l'orbite elliptique pendant une révolution entière de la comète, c'est-à-dire dans l'espace de temps qui s'écoule entre deux passages de cet astre au périhélie; mais les calculs que cette méthode exige dans les applications sont immenses, et il convient de les restreindre autant que possible, pour éviter tout travail inutile au calculateur. C'est ce qu'on peut faire

tres simplement lorsque la comète est dans la partie supérieure de son orbite, et que sa distance au Soleil devient très grande, relativement à celle de la planète perturbatrice au même astre. La fonction dont les perturbations dépendent peut, dans ce cas, se développer en série ordonnée par rapport aux puissances descendantes de cette distance, et les expressions différentielles des altérations des élémens elliptiques se partagent alors en deux parties dont l'une est intégrale par elle-même, et dont l'autre, beaucoup moins considérable que la première, peut se déterminer par des approximations successives, aussi exactement que l'on veut.

La théorie des perturbations des comètes peut donc être regardée comme complète, et les travaux de Lagrange sur ce sujet, exposés dans un beau Mémoire qui remporta le prix proposé par l'Académie des Sciences, en 1780, n'ont presque rien laissé à faire à ses successeurs. Sans doute on pourrait désirer, pour déterminer ces perturbations, une méthode dont l'application numérique fût plus simple; mais, par la nature même des difficultés que présente la question, il me paraît douteux qu'on y parvienne, et il est probable que long-temps encore ce sera à la patience du calculateur à suppléer sur ce point aux imperfections de l'analyse.

Nous présenterons, dans ce chapitre, les expressions différentielles des élémens de l'orbite troublée des comètes, sous la forme particulière qu'il convient de leur donner, pour faciliter l'application de la méthode des quadratures mécaniques à leur intégra-

tion. Nous développerons ensuite ces formules pour le cas où la comète est dans la partie supérieure de son orbite, et en considérant les termes de ces expressions qui peuvent s'intégrer rigoureusement, nous donnerons des formules analytiques qui exprimeront, sous forme finie, la partie la plus considérable des perturbations. Nous exposerons enfin le moyen de déterminer par approximation l'autre partie avec toute la précision désirable. Dans le chapitre suivant, nous présenterons, avec autant de détails que le permettront les bornes de cet ouvrage, l'application de ces formules aux trois comètes dont le retour périodique est maintenant constaté.

29. Soient m la masse de la comète x, y, z ses coordonnées rectangulaires rapportées au centre du Soleil dont la masse est représentée par M; soient x', y', z' les coordonnées de la planète perturbatrice m', rapportées aux mêmes axes et à la même origine que les premières. Si l'on désigne par r et r' les rayons vecteurs de m et de m', et que pour abréger on fasse

$$\rho^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2,$$

et

$$R = m'.\left(\frac{1}{\rho} - \frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3}\right),$$

les trois équations différentielles du mouvement de m autour de M, en négligeant, pour plus de simplicité, la masse de la comète devant celle du Soleil prise pour unité, ce qui suppose $m+M=1$, seront, n° 8, livre II,

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{x}{r^3}&=\frac{dR}{dx},\\ \frac{d^2y}{dt^2}+\frac{y}{r^3}&=\frac{dR}{dy},\\ \frac{d^2z}{dt^2}+\frac{z}{r^3}&=\frac{dR}{dz}.\end{aligned}\right\}\quad\text{(A)}$$

orsque R est nul, ou lorsqu'on fait abstraction forces perturbatrices, ces équations sont celles mouvement elliptique : nous avons développé s intégrales complètes dans le chapitre IV du livre

ipposons donc que x, y, z soient les trois coornées de la comète dans l'orbite elliptique, et $\cdot\delta x$, $y+\delta y$, $z+\delta z$, ce que deviennent ces urs dans l'orbite troublée, δx, δy et δz étant rès petites quantités de l'ordre des forces perturices ; en substituant $x+\delta x$, $y+\delta y$, $z+\delta z$, place de x, y, z dans les équations précédentes, égligeant, comme on le fait ordinairement dans héorie des comètes, les termes du second ordre rapport à m', on aura

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2.\delta x}{dt^2}+\frac{\delta x}{r^3}-\frac{3x\delta r}{r^4}&=\frac{dR}{dx},\\ \frac{d^2.\delta y}{dt^2}+\frac{\delta y}{r^3}-\frac{3y\delta r}{r^4}&=\frac{dR}{dy},\\ \frac{d^2.\delta z}{dt^2}+\frac{\delta z}{r^3}-\frac{3z\delta r}{r^4}&=\frac{dR}{dz}.\end{aligned}\right\}\quad\text{(B)}$$

i ces équations étaient intégrables, elles donnent immédiatement les valeurs des variations δx, et δz, et en les joignant aux valeurs des trois

coordonnées x, y, z relatives au mouvement elliptique, on pourrait déterminer à chaque instant le lieu de la comète dans son orbite troublée.

On peut satisfaire aux équations (B) dans deux cas qu'il convient d'examiner, parce qu'il en résultera des considérations qui nous seront utiles dans la suite. Supposons d'abord que la comète s'approche beaucoup du Soleil; les coordonnées x, y, z deviennent alors très petites, ainsi que les quantités $\frac{dR}{dx}$, $\frac{dR}{dy}$, $\frac{dR}{dz}$; en effet, en développant R, on a

$$R = m'.\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{2}.\frac{r^2}{r'^3} + \frac{3}{2}.\frac{(xx'+yy'+zz')^2}{r'^5} + \text{etc.}\right),$$

d'où l'on voit que si l'on suppose que x, y, z soient de l'ordre m', les trois différentielles partielles de R seront de l'ordre du carré des forces perturbatrices, et les altérations qui en résulteront seront insensibles. Il est permis, par conséquent, de supposer nuls les seconds membres des équations (A), d'autant plus que dans ce cas les termes $\frac{x}{r^3}$, $\frac{y}{r^3}$, $\frac{z}{r^3}$ deviennent très grands. Le mouvement peut donc être alors regardé comme elliptique, et l'on satisfait en effet aux équations (B), en y faisant δx, δy et δz égaux à zéro.

Concevons maintenant la comète dans la partie opposée de son orbite, et supposons que son rayon vecteur r devienne très grand relativement au rayon vecteur r' de la planète perturbatrice. On pourra développer R en suite convergente par rapport aux puissances descendantes de r; on aura ainsi

$$R = m'.\left[\frac{1}{r} + (xx'+yy'+zz')\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3}\right)\right] + R';$$

en supposant, pour abréger,

$$R' = \tfrac{1}{2}m'.\left[-\frac{r'^2}{r^3} + \frac{3.(xx'+yy'+zz'-\frac{1}{2}r'^2)^2}{r^5} + \frac{5.(xx'+yy'+zz'-\frac{1}{2}r'^2)^3}{r^7} + \text{etc.}\right].$$

En différenciant cette expression de R, abstraction faite de R′, on trouve

$$\frac{dR}{dx} = m'.\left[\frac{x'-x}{r^3} - \frac{x'}{r'^3} - \frac{3x}{r^5}.(xx'+yy'+zz')\right],$$

valeur exacte, comme il est aisé de s'en assurer, aux quantités près de l'ordre $\frac{m'}{r^4}$; la première des équations (B) devient donc

$$\frac{d^2\delta x}{dt^2} + \frac{\delta x}{r^3} - \frac{3x\delta r}{r^4} = m'.\left[\frac{x'-x}{r^3} - \frac{x'}{r'^3} - \frac{3x}{r^5}.(xx'+yy'+zz')\right].$$

Si l'on observe que l'on a

$$\delta r = \frac{x\delta x + y\delta y + z\delta z}{r},$$

et que, négligeant le carré des forces perturbatrices, on peut supposer dans les termes multipliés par m',

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{x}{r^3}, \quad \frac{d^2x'}{dt^2} = -\frac{x'}{r'^3},$$

on verra aisément que cette équation peut s'écrire ainsi

$$\frac{d^2.\delta x}{dt^2} - m'.\frac{d^2x'}{dt^2} - m'.\frac{d^2x}{dt^2} = (\delta x - m'x').\left(\frac{3x^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right)$$
$$+ (\delta y - m'y').\frac{3xy}{r^5} + (\delta z - m'z').\frac{3xz}{r^5}.$$

Les équations différentielles en δy et δz fourniront deux équations semblables. On satisfait à ces équations, abstraction faite du dernier terme de leur premier membre, en supposant $\delta x = m'x'$, $\delta y = m'y'$ et $\delta z = m'z'$. Soient donc

$$\delta x = m'x' + \xi, \quad \delta y = m'y' + \eta, \quad \delta z = m'z' + \zeta,$$

l'équation précédente deviendra

$$\frac{d^2.\xi}{dt^2} - m'.\frac{d^2x}{dt^2} = \xi.\left(\frac{3x^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right) + \eta.\frac{3xy}{r^5} + \zeta.\frac{3xz}{r^5},$$

et l'on y satisfera en prenant $\xi = \frac{1}{3}.m'x$, $\eta = \frac{1}{3}.m'y$, $\zeta = \frac{1}{3}.m'z$. Il en serait de même des équations différentielles relatives à η et à ζ; on aura donc enfin

$$\delta x = m'x' + \tfrac{1}{3}.m'x, \quad \delta y = m'y' + \tfrac{1}{3}.m'y, \quad \delta z = m'z' + \tfrac{1}{3}.m'z.$$

Telles sont les valeurs de δx, δy et δz qui résultent des équations (B), abstraction faite des termes que nous y avons négligés, et qui sont d'autant plus exactes que la comète s'éloigne davantage du Soleil. Si l'on voulait avoir des intégrales de ces équations plus approchées, on désignerait par $\delta' x$, $\delta' y$, $\delta' z$, les quantités très petites qu'il faut ajouter aux précédentes, pour avoir les valeurs exactes de δx, δy, δz, et changeant dans les équations (B) δx, δy, δz en $\delta' x$, $\delta' y$, $\delta' z$ et R en R', on aurait trois nouvelles équations qui serviraient à déterminer ces quantités.

30. Proposons-nous maintenant de déterminer les variations qu'il faut faire subir aux constantes qui entrent dans les formules du mouvement elliptique, pour satisfaire généralement aux équations (A), au

moyen des mêmes intégrales. En supposant R nul, nous sommes parvenus, dans le chapitre IV du livre II, aux sept intégrales suivantes,

$$\left.\begin{array}{ll} xy_{\prime}-x_{\prime}y=c\,, & x_{\prime}z-xz_{\prime}=c', \\ yz_{\prime}-zy_{\prime}=c'', & \frac{x}{r}=cy_{\prime}-c'z_{\prime}-f, \\ \frac{y}{r}=c''z_{\prime}-cx_{\prime}-f', & \frac{z}{r}=c'x'-c''y_{\prime}-f'', \\ x_{\prime}^{2}+y_{\prime}^{2}+z_{\prime}^{2}-\frac{2}{r}+\frac{1}{a}=0. & \end{array}\right\}(C)$$

En nommant, pour abréger, $x_{\prime}, y_{\prime}, z_{\prime}$, les trois quantités $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$.

La constante a représente, dans ces équations, le demi grand axe de l'orbite.

Les trois constantes c, c', c'' fixent sa position. En effet, si l'on nomme φ l'inclinaison du plan de cette orbite sur le plan fixe des x, y, et α la longitude de son nœud ascendant comptée sur le même plan, on aura

$$z=\operatorname{tang}\varphi\cos\alpha.y-\operatorname{tang}\varphi\sin\alpha.x.$$

Cette équation, étant comparée à l'équation $cz+c'y+c''x=0$, qui résulte des intégrales (C), donne

$$\operatorname{tang}\varphi=\frac{\sqrt{c'^{2}+c''^{2}}}{c}, \quad \operatorname{tang}\alpha=-\frac{c''}{c'}.$$

Les constantes f, f', f'' déterminent l'excentricité et le lieu du périhélie. En effet, soient e le rapport de l'excentricité au demi grand axe, et i la longitude du périhélie projeté sur le plan des x, y, on

aura, n° 21, livre II,

$$e = \sqrt{f^2 + f'^2 + f''^2}, \quad \tang i = \frac{f'}{f}.$$

Pour simplifier les formules suivantes, nous prendrons, pour le plan fixe auquel on rapporte la position de la comète et celle des planètes perturbatrices, le plan de l'orbite primitive de la comète; dans ce cas, l'angle φ est nul à l'origine de la période que l'on considère, en sorte que les constantes c' et c'' seront de l'ordre des forces perturbatrices. On a d'ailleurs, par le numéro cité,

$$f'' = -\frac{f'c' + fc''}{c},$$

d'où l'on voit que f'' est du même ordre que c' et c''. Il suit de là que si l'on n'a égard, comme nous le ferons, qu'à la première puissance des forces perturbatrices, on pourra négliger le carré de f''; si de plus on nomme ω la longitude du périhélie sur l'orbite comptée à partir de l'axe des x, on aura, aux quantités près du second ordre, par rapport à l'inclinaison φ, $i = \omega$; on aura donc simplement, pour déterminer les deux constantes e et ω,

$$e = \sqrt{f^2 + f'^2}, \ \sin\omega = \frac{f'}{\sqrt{f^2 + f'^2}}, \cos\omega = \frac{f}{\sqrt{f^2 + f'^2}},$$

ou, ce qui revient au même,

$$e . \sin\omega = f', \quad e . \cos\omega = f. \qquad (b)$$

Déterminons maintenant les variations des six

constantes a, c, c', c'', f et f'. Comme les grandes excentricités et les grandes inclinaisons des orbites des comètes ne permettent pas d'appliquer à ces astres les formules que nous avons développées dans la théorie des inégalités planétaires, nous ne suivrons pas ici l'analyse du chapitre VI du livre II, et nous exprimerons les altérations des élémens de l'orbite elliptique par des formules qui contiendront la quantité R et ses différentielles sous la forme où elles sont données immédiatement, c'est-à-dire en fonction des coordonnées de la comète et des planètes perturbatrices. Les intégrales (C), où les constantes arbitraires se trouvent exprimées au moyen des coordonnées de la comète et de leurs différences premières divisées par l'élément du temps, sont très commodes pour cet objet. En effet, nous avons vu n° 37, livre cité, que si l'on suppose à l'une quelconque des intégrales du mouvement elliptique cette forme

$$a = \text{fonct.}(x, y, z, x_{,}, y_{,}, z_{,}),$$

la même intégrale conviendra aux équations différentielles du mouvement troublé, pourvu qu'on y regarde comme variable la constante a, et qu'on détermine sa variation par l'équation

$$da = \frac{da}{dx_{,}}.\delta x_{,} + \frac{da}{dy_{,}}.\delta y_{,} + \frac{da}{dz_{,}}.\delta z_{,}. \qquad \text{(D)}$$

La caractéristique δ désignant ici des différentiations relatives aux constantes seulement, les variations de ces constantes étant liées entre elles par les équa-

tions

$$\delta x = 0, \qquad \delta y = 0, \qquad \delta z = 0,$$
$$\delta x_{,} = \frac{dR}{dx}.dt, \quad \delta y_{,} = \frac{dR}{dy}.dt, \quad \delta z_{,} = \frac{dR}{dz}.dt.$$

Si l'on substitue successivement a, c, c', c'', f, f' et leurs différentielles dans la formule générale (D), et qu'on remplace les trois quantités $\delta x_{,}$, $\delta y_{,}$, $\delta z_{,}$ par leurs valeurs, en observant que z est de l'ordre des forces perturbatrices et que nous négligeons leur carré, on aura d'abord

$$d.\frac{1}{a} = -2.\left(x_{,}\frac{dR}{dx} + y_{,}\frac{dR}{dy}\right).dt, \qquad (1)$$

et ensuite

$$\left.\begin{aligned} dc &= \left(x\frac{dR}{dy} - y\frac{dR}{dx}\right).dt, \\ dc' &= -\ x.\frac{dR}{dz}.dt, \\ dc'' &= \ y.\frac{dR}{dz}.dt, \\ df &= \left(x\frac{dR}{dy} - y\frac{dR}{dx}\right).dy + (xdy - ydx).\frac{dR}{dy}, \\ df' &= \left(y\frac{dR}{dx} - x\frac{dR}{dy}\right).dx + (ydx - xdy).\frac{dR}{dx}. \end{aligned}\right\} (2)$$

Les variations des constantes f, f', c', c'' étant déterminées, on en conclura aisément celles des constanstes e, ω, φ et α. En effet, en différenciant les équations (b), on aura

$$de = \sin\omega.df' + \cos\omega.df,$$
$$ed\omega = \cos\omega.df' - \sin\omega.df.$$

Nous avons nommé ϖ la longitude du périhélie comptée de l'axe des x; si l'on prend pour cette droite le grand axe de l'orbite de la comète, ϖ sera de l'ordre des forces perturbatrices, et les équations précédentes donneront simplement

$$de = df, \qquad ed\varpi = df'.$$

Si l'on suppose, comme dans le n° 44, livre II,

$$\text{tang}\,\varphi \sin \alpha = p, \quad \text{tang}\,\varphi \cos \alpha = q,$$

et qu'on remarque qu'on a, n° 20 du même livre, $c^2 + c'^2 + c''^2 = a.(1 - e^2)$, ce qui donne, en négligeant le carré des forces perturbatrices $c = \sqrt{a.(1-e^2)}$, on aura

$$dp = \frac{dc''}{\sqrt{a.(1-e^2)}}, \quad dq = -\frac{dc'}{\sqrt{a.(1-e^2)}}.$$

Ces formules serviront à déterminer la position de l'orbite troublée de la comète par rapport au plan de son orbite primitive; il sera facile ensuite d'en conclure la position de cette orbite par rapport à un plan fixe quelconque.

31. Il nous reste à trouver la variation de la sixième arbitraire qui entre dans les formules du mouvement elliptique, et que nous avons nommée la longitude de l'époque. Reprenons, pour cela, les formules de ce mouvement; en faisant, pour abréger, $n = a^{-\frac{3}{2}}$, on a, n° 22, livre II,

$$\left.\begin{aligned} nt + \varepsilon - \varpi &= u - e \sin u, \\ r = \frac{a.(1-e^2)}{1 + e\cos(v - \varpi)} &= a.(1 - e \cos u). \end{aligned}\right\}(a)$$

Dans ces équations, $nt+\varepsilon$ représente la longitude moyenne de la comète, $nt+\varepsilon-\varpi$ est son anomalie moyenne, u son anomalie excentrique, et $v-\varpi$ son anomalie vraie.

Soient x et y les coordonnées rectangulaires de la comète rapportées au plan et au grand axe de son orbite, les abscisses x étant comptées du foyer vers le périhélie, on aura

$$x = r\cos(v-\varpi), \quad y = r\sin(v-\varpi);$$

on a d'ailleurs, en comparant les deux valeurs de r,

$$\frac{1-e^2}{1+e\cos(v-\varpi)} = 1-e\cos u,$$

d'où l'on tire

$$\sin(v-\varpi) = \frac{\sqrt{1-e^2}.\sin u}{1-e\cos u}, \qquad \cos(v-\varpi) = \frac{\cos u - e}{1-e\cos u}.$$

En substituant ces valeurs dans les expressions de x et de y, on trouve

$$x = a.\cos u - ae, \quad y = a\sqrt{1-e^2}.\sin u.$$

Cela posé, si l'on différencie la première des équations (a), on aura, dans le cas de l'ellipse invariable,

$$ndt = du.(1-e\cos u).$$

Cette équation doit encore subsister dans le cas de l'ellipse troublée, c'est-à-dire lorsqu'on regarde ses élémens comme variables; on aura donc ainsi

$$d\varepsilon - d\varpi = du.(1-e\cos u) - de.\sin u, \qquad (3)$$

l'anomalie u ne variant ici qu'à raison de la variation des constantes que sa valeur renferme.

Si l'on différencie l'expression de $\cos(v-\omega)$ en y faisant varier les constantes e et ω, et qu'on y substitue ensuite pour $\sin(v_{,}-\omega)$ sa valeur, on trouvera aisément

$$du = -\frac{\sin u}{1-e^2}\cdot de - \frac{1-e\cos u}{\sqrt{1-e^2}}\cdot d\omega.$$

Cette valeur, substituée dans l'équation (3), donne

$$d\epsilon - d\omega = -\frac{de.\sin u(2-e\cos u-e^2)}{1-e^2} - \frac{d\omega.(1-e\cos u)^2}{\sqrt{1-e^2}}; \quad (4)$$

formule qui déterminera la variation de ϵ, lorsque celles de e et de ω seront connues. On peut écrire ainsi cette équation

$$d\epsilon - d\omega.(1-\sqrt{1-e^2}) = -\frac{de.\sin u.(2-e\cos u-e^2)}{1-e^2}$$
$$+\frac{ed\omega.[\cos u.(2-e\cos u)-e]}{\sqrt{1-e^2}};$$

et si l'on remplace, dans le second membre, de et $ed\omega$ par leurs valeurs df et df', et qu'on observe que les valeurs de x et y, en les différenciant et substituant pour du sa valeur tirée de l'équation $ndt = du.(1-e\cos u)$, donnent

$$dx = -\frac{andt.\sin u}{1-e\cos u}, \quad dy = \frac{andt.\sqrt{1-e^2}.\cos u}{1-e\cos u}.$$

Il est facile de voir qu'on pourra lui donner cette forme

$$d\varepsilon - d\varpi.(1-\sqrt{1-e^2}) = -\frac{1}{a\sqrt{1-e^2}}.(y.df - x.df')$$
$$+\frac{(1-e\cos u)^2}{an(1-e^2)}.\left(\frac{dx}{dt}.df + \frac{dy}{dt}.df'\right).$$

Maintenant, si dans cette équation on substitue pour df et df' leurs valeurs déterminées précédemment, en remarquant que l'on a

$$x\,dy - y\,dx = a^2\sqrt{1-e^2}.\,ndt,$$
$$a^2.(1-e\cos u)^2 = r^2 = x^2 + y^2,$$

on trouvera

$$d\varepsilon = d\omega.(1-\sqrt{1-e^2}) - 2andt.\left(x\frac{dR}{dx} + y\frac{dR}{dy}\right). \quad (5)$$

Cette équation donnera la valeur de $d\varepsilon$ au moyen de celle de $d\omega$ supposée connue. En remplaçant $d\omega$ par sa valeur, on aurait, pour déterminer $d\varepsilon$, une formule directe; mais il est plus commode de lui laisser cette forme.

On peut observer qu'en différenciant la première des équations (a), nous avons regardé n comme invariable; la variation de cette constante introduirait dans l'expression précédente de $d\varepsilon$ le terme $-tdn$; mais ce terme disparaîtrait dans l'expression différentielle de la longitude moyenne $nt+\varepsilon$ qui serait en effet

$$ndt + tdn - tdn + d\varepsilon.$$

Il est donc inutile d'y avoir égard, puisque l'expression de cette longitude est la seule qui contienne la constante ε dans les formules du mouvement elliptique, ou, ce qui revient au même, on peut supposer

que le moyen mouvement est exprimé par $\int ndt$ dans le mouvement elliptique et dans le mouvement troublé, la valeur de n étant, dans ce dernier cas, celle qui résulte des perturbations. Pour la déterminer, observons que l'équation $n = a^{-\frac{3}{2}}$ donne, en la différenciant,

$$dn = \frac{3}{2} . an . d\frac{1}{a}.$$

En substituant donc pour $d\frac{1}{a}$ sa valeur, on aura

$$dn = - 3an.\left(\frac{dR}{dx} . dx + \frac{dR}{dy} . dy\right).$$

Cette équation donnera, en l'intégrant et en y ajoutant une constante, le moyen mouvement dans l'orbite troublée.

32. Rassemblons les différentes formules que nous venons de trouver. Si, pour simplifier, on fait

$$X = \frac{x'-x}{\rho^3} - \frac{x'}{r'^3}, \quad Y = \frac{y'-y}{\rho^3} - \frac{y'}{r'^3}, \quad Z = z'.\left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r'^3}\right),$$

ce qui donne

$$\frac{dR}{dx} = m'X, \quad \frac{dR}{dy} = m'Y, \quad \frac{dR}{dz} = m'Z,$$

et que l'on substitue dans ces formules pour $\frac{dR}{dx}$, $\frac{dR}{dy}$, $\frac{dR}{dz}$, les valeurs précédentes, et pour x et y, leurs valeurs en fonction de u, on aura

$$\left.\begin{aligned}
da &= -2m'du.a^3 \sin u.X + 2m'du.a^3\sqrt{1-e^2}.\cos u.Y,\\
de &= m'.du.a\sqrt{1-e^2}.\cos u.(xY-yX) + m'du.a\sqrt{1-e^2}.rY,\\
ed\varpi &= m'du.\, a\sin u.(xY-yX) - m'du.a\sqrt{1-e^2}.rX,\\
d\epsilon &= (1-\sqrt{1-e^2}).d\varpi - 2m'du.r.(xX+yY),\\
dp &= \frac{m'du}{\sqrt{1-e^2}}.ryZ,\\
dq &= \frac{m'du}{\sqrt{1-e^2}}.rxZ.
\end{aligned}\right\}(6)$$

En joignant à ces équations la suivante,

$$dn = 3m'du.a^2n.\sin u.X - 3m'du.a^2n\sqrt{1-e^2}.\cos uY, \quad (7)$$

qui donne directement la variation du moyen mouvement, on pourra déterminer par de simples quadratures les altérations de chacun des élémens qui fixent les dimensions et la position de l'orbite de la comète, ainsi que la situation de cet astre à un instant donné.

Dans les applications numériques des formules précédentes, on sera obligé de déterminer les valeurs des différentes variables qu'elles renferment, correspondantes à une valeur donnée de l'anomalie excentrique u. On a, par le n° 31, l'expression des coordonnées x, y, et du rayon vecteur r de la comète en fonction de u; on pourra donc en déduire immédiatement leurs valeurs, et il ne restera plus qu'à calculer les valeurs simultanées des coordonnées x', y', z' de la planète perturbatrice. Pour cela, observons que le grand axe de l'orbite de la comète ayant été pris pour axe des x, si l'on nomme γ l'inclinaison de l'orbe de la planète sur celui de la comète, λ la

longitude de son nœud ascendant, comptée sur ce dernier plan, à partir de la ligne des absides, qu'on désigne de plus par v' l'angle que fait le rayon vecteur r' avec la ligne des nœuds, on aura, par une construction très simple,

$$x' = r' \cos v' . \cos \lambda - r' \sin v' . \sin \lambda . \cos \gamma,$$
$$y' = r' \cos v' . \sin \lambda + r' \sin v' . \cos \lambda . \cos \gamma,$$
$$z' = r' \sin v' . \sin \gamma.$$

Il sera facile, d'après les positions connues des orbites de la comète et des planètes perturbatrices, de calculer les constantes λ et γ qui entrent dans ces valeurs. Quant au rayon vecteur r' et à l'angle v', on observera que le temps écoulé depuis le passage au périhélie est donné, en fonction de u, par l'équation

$$t = a^{\frac{3}{2}}.(u - e . \sin u).$$

En joignant la valeur qui en résultera à l'instant du passage, on aura l'époque qui se rapporte à la variation supposée dans l'arc de l'anomalie excentrique u; les tables astronomiques fourniront ensuite toutes les données nécessaires pour déterminer les valeurs correspondantes de r' et de v'.

33. Un des points les plus importans de la théorie des comètes est l'altération du temps périodique; elle dépend de l'altération de l'anomalie moyenne, et celle-ci se détermine aisément au moyen des formules précédentes.

En effet, si l'on nomme ζ l'anomalie moyenne de la comète, on aura, dans l'orbite elliptique,

$$\zeta = \int ndt + \varepsilon - \omega.$$

Cette équation conviendra encore au mouvement troublé, pourvu qu'on y regarde ε et ω comme variables et qu'on y substitue pour n sa valeur

$$n = \text{N} + \int dn,$$

N étant une constante qui représente la valeur de n, ou le moyen mouvement de la comète dans l'unité de temps, au commencement de la période que l'on considère, et $\int dn$ étant déterminé par la formule (7). On aura donc, en différenciant la valeur de ζ, par rapport aux constantes seulement,

$$d\zeta = dt.\int dn + d\varepsilon - d\omega;$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$\int d\zeta = \int dt\int dn + \int d\varepsilon - \int d\omega.$$

Cette équation servira à déterminer la variation de l'anomalie moyenne; on peut la simplifier en faisant disparaître la double intégrale qu'elle renferme: en effet, on a

$$\int dt\int dn = t\int dn - \int tdn;$$

on aura donc

$$\int d\zeta = t\int dn - \int tdn + \int d\varepsilon - \int d\omega,$$

valeur qui ne dépend plus que de simples quadratures, comme celle des altérations des autres élémens de l'orbite.

Cela posé, on aura généralement pour l'expression

de l'anomalie moyenne dans l'orbite troublée, après un temps quelconque t,

$$\zeta = Nt + \varepsilon - \omega + \int d\zeta.$$

Si l'on suppose que l'on commence à compter le temps t de l'instant du passage au périhélie, l'angle $\varepsilon - \omega$ sera nul pour cette époque, puisque, par cette hypothèse, on a $\zeta = 0$ en même temps que $t = 0$. On aura donc simplement

$$\zeta = Nt + \int d\zeta.$$

Soit T le temps qui s'écoule entre deux passages consécutifs de la comète à son périhélie, lorsqu'elle aura achevé sa révolution; on aura

$$\int d\zeta = T\int dn - \int t dn + \int d\varepsilon - \int d\omega. \quad (8)$$

Les intégrales devant s'étendre depuis $t = 0$ jusqu'à $t = T$, l'anomalie augmente dans cet intervalle de 360°; on aura donc, pour le même instant,

$$2\pi = NT + \int d\zeta, \quad (9)$$

π étant la demi-circonférence dont le rayon est l'unité.

Prenons, pour fixer les idées, la comète de 1682, revenue à son périhélie en 1759, et dont il s'agit de fixer le prochain retour. On calculerait immédiatement l'instant de ce passage au moyen de l'équation (9), si la valeur de la constante N, relative au périhélie de 1759, était connue; mais cette valeur ne saurait se conclure directement, comme celle des autres élémens de l'orbite, des observations faites pendant l'apparition de 1759, elle se déduit du temps qu'à

employé la comète à faire sa révolution anomalistique de 1682 à 1759, et cette donnée est affectée des pertubations qu'a éprouvées cet astre durant cette période. Pour la déterminer, supposons que T soit l'intervalle de temps qui sépare les passages de 1682 et de 1759, et que N soit la valeur de n qui répond à l'origine de cette période; à l'instant du passage au périhélie de 1759, par l'équation (9), on aura

$$N = \frac{2\pi - \int d\zeta}{T}.$$

Les intégrales $\int$ devant commencer à l'instant du passage au périhélie de 1682, où nous fixons l'origine du temps t, et s'étendre depuis $t = 0$ jusqu'à $t = T$; et les valeurs des constantes e, ε, ω se rapportant aux observations du même passage.

Cette équation donnera la valeur de N relative au périhélie de 1682, et l'on en conclura celle de N', relative au périhélie de 1759, par l'équation

$$N' = N + \int dn,$$

l'intégrale commençant, comme les précédentes, à l'instant du passage au périhélie de 1682, et devant s'étendre depuis $t = 0$ jusqu'à $t = T$. On aura ensuite les valeurs du grand axe de l'orbite qui se rapportent aux mêmes époques par les équations

$$N^2 = \frac{1}{a^3}, \quad N'^2 = \frac{1}{a'^3}.$$

Soit maintenant T' l'intervalle de temps inconnu qui s'écoulera entre le passage au périhélie de 1759 et le prochain retour qu'il s'agit de déterminer. On

aura, pour cette époque,

$$\int \overline{d\zeta} = t\int \overline{dn} - \int t\overline{dn} + \int \overline{d\epsilon} - \int \overline{d\varpi}, \qquad (10)$$

et par suite,

$$2\pi = \text{N}'\text{T}' + \int \overline{d\zeta}; \qquad (11)$$

les intégrales $\overline{\int}$ commençant ici à l'instant du passage au périhélie de 1759, et s'étendant depuis $t = 0$ jusqu'à $t = \text{T}'$; les valeurs des constantes e, ϵ, ϖ qu'elles renferment étant d'ailleurs celles qui résultent des observations de la comète faites à la même époque.

L'équation (11), qui ne renferme que l'inconnue T', servira à déterminer sa valeur. On connaîtra ainsi l'intervalle de temps qui doit s'écouler entre le passage de la comète au périhélie effectué en 1759, et le passage suivant; on pourra par conséquent fixer d'avance l'époque de son prochain retour au même point de son orbite.

34. Toute la difficulté de la théorie des perturbations des comètes se réduit donc à intégrer les formules (6). Cette intégration, comme nous l'avons dit, n'est pas possible en général; on ne peut l'effectuer que par le moyen des quadratures mécaniques. L'analyse fournit différentes formules pour cet objet; nous allons présenter celle que l'on a généralement adoptée, et qui résulte fort simplement des premiers principes du *calcul aux différences*.

Soit y une fonction quelconque de x, et soient $y^{(0)}, y^{(1)}, y^{(2)} \ldots, y^{(i)}$, ce que devient successivement cette fonction, lorsqu'on suppose $x = 0$, $x = \alpha$, $x = 2\alpha \ldots$, $x = i\alpha$; désignons par $\Delta y^{(0)}$, $\Delta y^{(1)}$, etc.,

les différences finies de ces quantités prises deux à deux, par $\Delta^2 y^{(0)}$, $\Delta^2 y^{(1)}$ leurs différences secondes et ainsi de suite, en sorte qu'on ait

$$\left.\begin{array}{l|l|l}
y^{(1)}-y^{(0)}=\Delta y^{(0)}, & \Delta y^{(1)}-\Delta y^{(0)}=\Delta^2 y^{(0)}, & \Delta^2 y^{(1)}-\Delta^2 y^{(0)}=\Delta^3 y^{(0)}, \\
y^{(2)}-y^{(1)}=\Delta y^{(1)}, & \Delta y^{(2)}-\Delta y^{(1)}=\Delta^2 y^{(1)}, & \Delta^2 y^{(2)}-\Delta^2 y^{(1)}=\Delta^3 y^{(1)}, \\
y^{(3)}-y^{(2)}=\Delta y^{(2)}, & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \Delta y^{(i)}-\Delta y^{(i-1)}=\Delta^2 y^{(i-1)}, & \Delta^2 y^{(i)}-\Delta^2 y^{(i-1)}=\Delta^3 y^{(i-1)}, \\
y^{(i)}-y^{(i-1)}=\Delta y^{(i-1)}, & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & &
\end{array}\right\}(A$$

etc.

De ces équations on tire, par des substitutions faciles,

$$\begin{aligned}
y^{(1)} &= y^{(0)} + \Delta y^{(0)}, \\
y^{(2)} &= y^{(0)} + 2\Delta y^{(0)} + \Delta^2 y^{(0)}, \\
y^{(3)} &= y^{(0)} + 3\Delta y^{(0)} + 3\Delta^2 y^{(0)} + \Delta^3 y^{(0)}, \\
&\text{etc.};
\end{aligned}$$

d'où l'on conclut généralement

$$y^{(i)}=y^{(0)}+i.\Delta y^{(0)}+\frac{i(i-1)}{1.2}.\Delta^2 y^{(0)}+\frac{i(i-1)(i-2)}{1.2.3}.\Delta^3 y^{(0)}+\text{etc.} \; ($$

formule qui sera très convergente, si les différences Δy^{0}, $\Delta^2 y^{(0)}$, $\Delta^3 y^{(0)}$, etc., décroissent avec beaucoup de rapidité.

Cela posé, on peut regarder $y=f(x)$ comme l'équation d'une courbe parabolique dont y représente l'ordonnée et x l'abscisse ; cette courbe passera par les extrémités des ordonnées équidistantes $y^{(0)}$, $y^{(1)}$, etc., et l'on aura d'autant plus de facilité pour

la tracer, que ces coordonnées seront plus rapprochées; $y^{(i)}$ sera donc l'ordonnée qui répond à l'abscisse quelconque $x = i\alpha$ et $\int y^{(i)} dx$ l'aire indéfinie comprise entre la courbe et l'axe des x. Si dans l'équation (m), on substitue pour i sa valeur $\frac{x}{\alpha}$, on aura

$$y^{(i)} = y^{(0)} + \frac{x}{\alpha}.\Delta y^{(0)} + \frac{x(x-\alpha)}{1.2.\alpha^2}.\Delta^2 y^{(0)} + \frac{x(x-\alpha)(x-2\alpha)}{1.2.3.\alpha^3}.\Delta^3 y^{(0)} + \text{etc.}$$

Multiplions cette valeur par dx et intégrons-la depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \alpha$, l'expression résultante sera celle de l'aire comprise entre les ordonnées y^0 et $y^{(1)}$; on trouvera

$$\int y^{(i)} dx = \alpha.\left(y^{(0)} + \frac{1}{2}.\Delta y^{(0)} - \frac{1}{12}.\Delta^2 y^{(0)} + \frac{1}{24}.\Delta^3 y^{(0)} - \frac{19}{720}.\Delta^4 y^0 + \frac{3}{160}.\Delta^5 y^0 - \text{etc.}\right).$$

De même, pour l'aire comprise entre les ordonnées $y^{(i)}$ et $y^{(2)}$, on aura

$$\int y^{(i)} dx = \alpha.\left(y^{(1)} + \frac{1}{2}.\Delta y^{(1)} - \frac{1}{12}.\Delta^2 y^{(1)} + \frac{1}{24}.\Delta^3 y^{(1)} - \frac{19}{720}.\Delta^4 y^{(1)} + \frac{3}{160}.\Delta^5 y^{(1)} - \text{etc.}\right),$$

et ainsi de suite.

En prenant donc la somme de toutes ces valeurs, on aura pour l'aire totale comprise entre les ordonnées $y^{(0)}$ et $y^{(n)}$,

$$\begin{aligned}\int y dx = \alpha . &[y^{(0)} + y^{(1)} \ldots\ldots + y^{(n-1)}] \\ &+ \frac{\alpha}{2}.[\Delta y^{(0)} + \Delta y^{(1)} + \Delta y^{(2)} \ldots + \Delta y^{(n-1)}] \\ &- \frac{\alpha}{12}.[\Delta^2 y^{(0)} + \Delta^2 y^{(1)} + \Delta^2 y^{(2)} \ldots + \Delta^2 y^{(n-1)}] \\ &+ \text{etc.}\end{aligned}$$

On a d'ailleurs

$$\Delta y^{(0)} + \Delta y^{(1)} + \Delta y^{(2)} \ldots + \Delta y^{(n-1)} = y^{(n)} - y^{(0)},$$
$$\Delta^2 y^{(0)} + \Delta^2 y^{(1)} + \Delta^2 y^{(2)} \ldots + \Delta^2 y^{(n-1)} = \Delta y^{(n)} - \Delta y^{(0)},$$
etc.

L'expression précédente devient donc ainsi

$$\left.\begin{aligned} \int y\,dx = \alpha.&\left[\tfrac{1}{2}y^{(0)} + y^{(1)} + y^{(2)} \ldots + y^{(n-1)} + \tfrac{1}{2}y^{(n)}\right] \\ &- \frac{\alpha}{12}.[\Delta y^{(n)} - \Delta y^{(0)}] \\ &+ \frac{\alpha}{24}.[\Delta^2 y^{(n)} - \Delta y^{(0)}] \\ &- \frac{19.\alpha}{720}.[\Delta^3 y^{(n)} - \Delta y^{(0)}] \\ &+ \frac{3.\alpha}{160}.[\Delta^4 y^{(n)} - \Delta y^{(0)}] \\ &- \text{etc.} \end{aligned}\right\}(G)$$

La détermination des différences $\Delta y^{(n)}$, $\Delta^2 y^{(n)}$, etc., qui entrent dans cette formule, dépend des quantités $y^{(n+1)}$, $y^{(n+2)}$, etc., tandis qu'on n'est supposé avoir calculé ces ordonnées que depuis $y^{(0)}$ jusqu'à $y^{(n)}$. Ce serait un inconvénient pour la pratique, mais on peut l'éviter en donnant une autre forme à cette expression. Pour cela, remarquons que des équations (k), on tire

$$\Delta y^{(n)} = \Delta y^{(n-1)} + \Delta^2 y^{(n-2)} + \Delta^3 y^{(n-3)} + \text{etc.},$$
$$\Delta^2 y^{(n)} = \Delta^2 y^{(n-2)} + 2.\Delta^3 y^{(n-3)} + 3.\Delta^4 y^{(n-4)} + \text{etc.},$$
$$\Delta^3 y^{(n)} = \Delta^3 y^{(n-3)} + 3.\Delta^4 y^{(n-4)} + 2.3.\Delta^5 y^{(n-5)} + \text{etc.}$$
etc.;

d'où l'on peut conclure généralement

$^{n)} = \Delta^i y^{(n-i)} + i . \Delta^{i+1} y^{(n-i-1)} + \frac{i(i+1)}{1.2} . \Delta^{i+2} y^{(n-i-2)} + \text{etc.}$

i l'on substitue ces valeurs, qui ne dépendent
; que des quantités y^n, y^{n-1}, etc., dans la for-
e (G), on aura

$$
\left.\begin{aligned}
dx = \alpha . \left[\tfrac{1}{2} y^{0} + y^{(1)} + y^{(2)} \ldots + y^{(n-1)} + y^{(n)}\right] \\
- \frac{\alpha}{12} . [\Delta y^{(n-1)} - \Delta y^{(0)}] \\
- \frac{\alpha}{24} . [\Delta^2 y^{(n-2)} + \Delta^2 y^{(0)}] \\
- \frac{19.\alpha}{720} . [\Delta^3 y^{(n-3)} - \Delta^3 y^{(0)}] \\
- \frac{3.\alpha}{160} . [\Delta^4 y^{(n-4)} + \Delta^4 y^{(0)}] \\
- \text{etc.}
\end{aligned}\right\} (P)
$$

e premier terme de cette série représente,
me il est facile de s'en convaincre, la somme
petits trapèzes compris entre les ordonnées $y^{(0)}$,
.. $y^{(n)}$, somme qui approchera d'autant plus
'aire de la courbe parabolique, que les ordon-
seront plus rapprochées, et leurs variations plus
es.

. Pour appliquer la série précédente à l'intégra-
des formules (6), représentons par Pdu la varia-
différentielle de l'un quelconque des élémens
'orbite de la comète, et regardons P comme
onnée de la courbe parabolique dont l'anomalie
ntrique u est l'abscisse. On fera varier u de degré
egré ou de deux degrés en deux degrés, etc.,
qu'on le jugera convenable, et l'on détermi-

fonction R′, mais il suffira le plus souvent de s'arrêter aux premiers termes de son développement.

Faisons donc d'abord abstraction de R′; si l'on désigne par la caractéristique d' des différentielles uniquement relatives aux coordonnées de la comète, on aura

$$d'R = m'.\left[d.\frac{1}{r} + (x'dx + y'dy).\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3}\right) + (xx' + yy').d.\frac{1}{r^3}\right.$$

On peut, dans cette valeur, remplacer $\frac{x}{r^3}$, $\frac{x'}{r'^3}$ par $-\frac{d^2x}{dt^2}$, $-\frac{d^2x'}{dt^2}$ et $\frac{y}{r^3}$, $\frac{y'}{r'^3}$ par $-\frac{d^2y}{dt^2}$, $-\frac{d^2y'}{dt^2}$, l'erreur que l'on commet étant de l'ordre du carré des forces perturbatrices. On trouve ainsi

$$d'R = m'.d.\left(\frac{1}{r} + \frac{xx' + yy'}{r^3} + \frac{dxdx' + dydy'}{dt^2}\right).$$

Si l'on substitue cette valeur dans la formule (1), nº 30, et qu'on l'intègre, on aura

$$\delta a = 2m'.a^2.\left(\frac{1}{r} + \frac{xx' + yy'}{r^3} + \frac{dxdx' + dydy'}{dt^2}\right) + \text{const.}$$

Si l'on détermine la constante que cette équation renferme par la condition que δa soit nul au point de l'orbite où l'on a commencé à considérer séparément les deux parties de R, l'expression résultante sera celle de l'altération du grand axe après un temps quelconque, compté à partir de ce point, due à la partie de R indépendante de R′.

On peut obtenir, d'une autre manière, la valeur de δa. En effet, si l'on différencie, par rapport à la

caractéristique δ, qui aura ici la signification que nous lui avons donnée n° 29, l'équation

$$\frac{1}{a}=\frac{2}{r}-\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}.$$

On aura

$$\frac{\delta a}{a^2}=\frac{2\delta r}{r^2}-\frac{2dxd.\delta x+2dyd.\delta y}{dt^2}.$$

Nous avons trouvé, dans le numéro cité, par l'intégration directe des équations différentielles du mouvement troublé,

$$\delta x=\tfrac{1}{3}.m'x+m'x',\quad \delta y=\tfrac{1}{3}.m'y+m'y',$$
$$\delta z=\tfrac{1}{3}.m'z+m'z'.$$

En substituant ces valeurs et leurs différentielles dans l'équation précédente, on aura

$$\delta a=2m'a^2.\left[\frac{1}{3}.\left(\frac{1}{r}+\frac{dx^2+dy^2}{dt^2}\right)+\frac{xx'+yy'}{r^3}+\frac{dxdx'+dydy'}{dt^2}\right],$$

ou bien en remplaçant $\frac{dx^2+dy^2}{dt^2}$ par sa valeur $\frac{2}{r}-\frac{1}{a}$,

$$\delta a=-\frac{2}{3}.m'a-2m'a^2.\left(\frac{1}{r}+\frac{xx'+yy'}{r^3}+\frac{dxdx'+dydy'}{dt^2}\right).$$

On voit que cette expression coïncide avec celle que nous avons déduite directement de la formule (1), en supposant dans celle-ci const. $=-\frac{2}{3}m'a$, la constante arbitraire étant déterminée, dans ce cas, de manière à satisfaire aux équations

$$\delta x - \tfrac{1}{3}.m'x - m'x' = 0, \quad \delta y - \tfrac{1}{3}.m'y - m'y' = 0,$$
$$\delta z - \tfrac{1}{3}.m'z - m'z' = 0.$$

L'équation $n^2 = \frac{1}{a^3}$ donne, en la différenciant par rapport à δ,

$$\delta n = -\frac{3}{2}.\frac{n}{a}.\delta a.$$

En substituant donc pour δa sa valeur précédente, on aura

$$\delta n = m'n - 3m'an.\left(\frac{1}{r} + \frac{xx' + yy'}{r^3} + \frac{dxdx' + dydy'}{dt^2}\right). \quad (g)$$

Cette valeur, augmentée d'une constante, donnera l'altération du moyen mouvement due à la partie de R indépendante de R'.

Déterminons, d'une manière semblable, la variation de l'excentricité et du périhélie due à la même partie de R.

La quatrième des équations (C), en remplaçant c et c' par leurs valeurs et négligeant le carré de z, donne

$$f = -\frac{x}{r} + \frac{dy.(xdy - ydx)}{dt^2}.$$

En différenciant, par rapport à la caractéristique δ, cette équation, on aura

$$\delta f = \frac{x\delta r - r\delta x}{r^2} + \frac{d\delta y.(xdy - ydx)}{dt^2}$$
$$+ \frac{dy.(xd.\delta y - yd.\delta x + dy\delta x - dx\delta y)}{dt^2};$$

et en substituant dans cette équation, pour δx, δy, δz, leurs valeurs précédentes, elle donnera

$$\delta f = m'.\left[\frac{dy.(xdy-ydx)}{dt^2}+\frac{y.(xy'-x'y)}{r^3}+\frac{dy'.(xdy-ydx)}{dt^2}\right.$$
$$\left.+\frac{dy.(xdy'-y'dx+x'dy-ydx')}{dt^2}\right].$$

Si l'on ajoute une constante arbitraire au second membre de cette équation, et qu'on la détermine par la condition que δf soit nul à un point donné de l'orbite, l'équation résultante donnera l'altération de f, à partir de ce point, due à la partie de R indépendante de R'. Cette valeur doit être identique avec celle qui résulterait de l'intégration directe de l'expression de df, n° 30; c'est en effet ce qu'il est facile de vérifier en la développant dans l'hypothèse précédente, et en observant qu'on peut y substituer $-\frac{d^2x}{dt^2}$, $-\frac{d^2x'}{dt^2}$ à la place de $\frac{x}{r^3}$ et de $\frac{x'}{r'^3}$, et $-\frac{d^2y}{dt^2}$, $-\frac{d^2y'}{dt^2}$ à la place de $\frac{y}{r^3}$ et de $\frac{y'}{r'^3}$.

Si l'on substitue pour $\frac{dy.(xdy-ydx)}{dt^2}$ sa valeur $f+\frac{x}{r}$ dans l'expression de δf, elle devient

$$\delta f = m'.\left[f+\frac{x}{r}+y.\frac{(xy'-x'y)}{r^3}+\frac{dy'.(xdy-ydx)}{dt^2}\right.$$
$$\left.+\frac{dy.(xdy'-y'dx+x'dy-ydx')}{dt^2}\right].$$

En changeant, dans cette formule, x en y, x' en y', et réciproquement, on aura, pour déterminer l'alté-

ration de f' due à la partie de R indépendante de R',

$$df' = m'.\left[f' + \frac{y}{r} - \frac{x.(xy' - x'y)}{r^3} - \frac{dx'.(xdy - ydx)}{dt^2} - \frac{dx.(xdy' - y'dx + x'dy - ydx')}{dt^2}\right].$$

Connaissant les variations de f et de f', on aura celles de e et de ω, par les équations

$$\delta e = \delta f \quad \text{et} \quad e\delta\omega = \delta f'.$$

Considérons les variations de l'inclinaison et du nœud de l'orbite due à la même partie de R. En la différenciant, on a

$$\frac{dR}{dz} = m'.\left[\frac{z' - z}{r^3} - \frac{z'}{r'^3} - \frac{3z}{r^5}.(xx' + yy')\right].$$

Si l'on substitue cette valeur dans les valeurs de dc' et dc'', n° 30, et qu'on néglige les termes de l'ordre du carré des forces perturbatrices, on trouve

$$dc' = m'.yz'.\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3}\right).dt,$$

$$dc'' = m'.xz'.\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3}\right).dt.$$

Remplaçons, dans ces équations, $\frac{x}{r^3}$, $\frac{y}{r^3}$, $\frac{z'}{r'^3}$ par $-\frac{d^2x}{dt^2}$, $-\frac{d^2y}{dt^2}$, $-\frac{d^2z'}{dt^2}$, et intégrons les équations résultantes, nous aurons

$$\delta c' = m'.\left(\frac{ydz' - z'dy}{dt}\right),$$

$$\delta c'' = m'.\left(\frac{xdz' - z'dx}{dt}\right).$$

Les valeurs de δc et de $\delta c'$ étant ainsi connues, on aura celles de δp et de δq, dues à la partie de R indépendante de R' par les équations

$$\delta p = \frac{\delta c''}{\sqrt{a.(1-e^2)}}, \quad \delta q = -\frac{\delta c'}{\sqrt{a.(1-e^2)}},$$

et il sera facile d'en conclure les altérations correspondantes de l'inclinaison et du nœud.

En retranchant les valeurs de δa, δn, δf, $\delta f'$, $\delta c'$, $\delta c''$, à un point donné de l'orbite, de leurs valeurs à un autre point donné, on aura les altérations dans l'intervalle, de a, n, f, f', c', c'', dues à la partie de R indépendante de R'.

37. On pourrait exprimer, par une formule semblable aux précédentes, la variation de la longitude de l'époque due à la même partie de R; mais cette formule est inutile à la détermination de l'altération de l'anomalie moyenne, qui peut se faire très simplement de la manière suivante : supposons que l'on fixe l'origine du temps au point de l'orbite où l'on commence à diviser en deux parties la fonction R, et nommons $\bar{N}$ le moyen mouvement de la comète en ce point, c'est-à-dire la valeur de n qui résulte des perturbations précédentes; on aura, après un temps quelconque t, compté du même point,

$$\int ndt + \delta\varepsilon - \delta\varpi = \bar{N}t + \int \delta' n.dt + \delta\varepsilon - \delta\varpi.$$

En désignant par $\delta' n$ la variation de n due à la partie de R indépendante de R', on aura donc, pour déterminer l'altération correspondante de l'anomalie

moyenne,

$$\delta\zeta = \int \delta' n . dt + \delta\varepsilon - \delta\omega.$$

Si l'on différencie cette expression et qu'on y substitue pour $d.\delta\varepsilon - d.\delta\omega$, sa valeur donnée par l'équation (4), n° 31, on aura

$$d.\delta\zeta = \delta' n . dt - \frac{d.\delta e . \sin u . (2 - e^2 - e\cos u)}{1 - e^2} - \frac{d.\delta\omega . (1 - e\cos u)^2}{\sqrt{1 - e^2}},$$

équation qu'on peut écrire ainsi :

$$d.\delta\zeta = -d.\left[\frac{\delta e . \sin u . (2 - e^2 - e\cos u)}{1 - e^2} + \frac{\delta\omega . (1 - e\cos u)^2}{\sqrt{1 - e^2}}\right]$$
$$+ \left(\frac{\delta' n}{n} + \delta e . \frac{(2\cos u + e)}{1 - e^2} + 2e\delta\omega . \frac{\sin u}{\sqrt{1 - e^2}}\right) . ndt.$$

En observant que l'on a, n° 31, $ndt = du . (1 - e\cos u)$, nous avons trouvé plus haut

$$\delta e = \delta f, \quad e\delta\omega = \delta f'.$$

Si l'on désigne par $m'l$ ce que devient la valeur de δn donnée par la formule (g), au point de l'orbite d'où nous comptons maintenant le temps t, il est clair qu'on aura

$$\delta' n = \delta n - m'l.$$

Les valeurs précédentes de δn, δf, $\delta f'$ donnent d'ailleurs cette relation très simple,

$$\frac{\delta n}{n} + \frac{2\cos u + e}{1 - e^2} . \delta f + \frac{2\sin u}{\sqrt{1 - e^2}} . \delta f' = \frac{m'}{a^2 n . \sqrt{1 - e^2}} . \left(\frac{xdy' - ydx' + y'dx - x'dy}{dt}\right)$$

équation qu'il est facile de vérifier en remplaçant δn, δf, $\delta f'$, par leurs valeurs et en comparant

dans les deux membres les coefficiens de x', y', $\frac{dx'}{dt}$ et $\frac{dy'}{dt}$ après les avoir préalablement exprimés en fonction de u.

L'expression de $d.\delta\zeta$ deviendra donc, en y substituant pour δn, δe, e$\delta\omega$ leurs valeurs, et en l'intégrant ensuite

$$\delta\zeta = -m'l.t + \frac{m'.(xy' - x'y)}{a^2.\sqrt{1-e^2}} - \frac{\delta f.\sin u.(2 - e^2 - e\cos u)}{1 - e^2}$$
$$- \frac{\delta f'.(1 - e\cos u)^2}{e.\sqrt{1-e^2}} + \text{const.}$$

On aura l'altération de l'anomalie moyenne, depuis un point de l'orbite jusqu'à un autre point donné, due à la partie de R indépendante de R', en retranchant la valeur de $\delta\zeta$ au premier de ces points de sa valeur au second.

38. Considérons maintenant les altérations des élémens de l'orbite dépendantes de R'. Lorsque la comète se trouve dans la partie supérieure de son orbite, R' étant une très petite quantité, les valeurs de ces variations sont aussi très peu considérables. Si pour les obtenir, on substitue R' à la place de R dans les formules (1) et (2), ce changement n'altérant en rien leur forme, il est clair qu'elles s'intégreront encore par la méthode exposée n° 34. Mais dans le cas où la comète s'éloigne beaucoup de la planète perturbatrice, et où il est avantageux de partager ainsi R en deux parties, ces formules peuvent se développer en suites convergentes, et l'on obtient leurs intégrales par une méthode d'approximation beaucoup

plus expéditive que celle des quadratures mécaniques.

Pour le faire voir, reprenons la valeur de R', n° 29,

$$R' = \tfrac{1}{2}.m'\left[-\frac{r'^2}{r^3}+\frac{3(xx'+yy'+zz'-\frac{1}{2}r'^2)^2}{r^5}+\frac{5(xx'+yy'+zz'-\frac{1}{2}r'^2)^3}{r^7}+\right.$$

Si l'on différencie cette valeur par rapport aux variables x, y, z, et que pour abréger, on fasse

$$P = \frac{3}{2}.\frac{r'^2}{r^5}-\frac{15}{2}.\frac{(xx'+yy'+zz'-\frac{1}{2}r'^2)^2}{r^7}-\frac{35}{2}.\frac{(xx'+yy'+zz'-\frac{1}{2}r'^2)^3}{r^9}-\text{etc.},$$

$$P' = \frac{3(xx'+yy'+zz'-\frac{1}{2}r'^2)}{r^5}-\frac{15}{2}.\frac{(xx'+yy'+zz'-\frac{1}{2}r'^2)^2}{r^7}-\text{etc.},$$

il est aisé de s'assurer qu'on aura

$$\frac{dR'}{dx}=m'.(Px+P'x'),\quad \frac{dR'}{dy}=m'.(Py+P'y'),\quad \frac{dR'}{dz}=m'.(Pz+P'z').$$

Substituons ces valeurs dans les formules (1), (2), (5), après y avoir changé R en R', nous aurons

$$\left.\begin{aligned}
da &= -2m'a^2.[P.(xdx+ydy)+P'.(x'dx+y'dy)],\\
df &= m'.P'.(x'y-xy').dy+m'.(xdy-ydx).(Py+P'y'),\\
df' &= m'.P'.(x'y-xy').dx+m'(ydx-xdy).(Py+P'y'),\\
d\iota &= df'.\left(\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{e}\right)-2andt.[P.(x^2+y^2)+P'.(xx'-yy')],\\
dp &= \frac{m'}{\sqrt{a(1-e^2)}}.P'.yz'.dt.\\
dq &= \frac{m'}{\sqrt{a(1-e^2)}}.P'.xz'.dt.
\end{aligned}\right\}(\ $$

Si l'on remplace dans ces formules P et P' par les

séries que ces lettres représentent; qu'on substitue ensuite pour x, y, z, et r leurs valeurs

$$x = r\cos v,\quad y = r\sin v,\quad z = 0,\quad r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v}.$$

et pour x', y', z', r', leurs valeurs données, n° 32, en fonction des sinus et cosinus de v'; qu'on observe que par les formules du mouvement elliptique, on a

$$\left.\begin{aligned} r^2dv &= dt.\sqrt{a.(1-e^2)}, \\ r'^2dv' &= dt.\sqrt{a'.(1-e'^2)}, \end{aligned}\right\} (n)$$

il est évident que chacune des expressions précédentes pourra se développer en une suite de termes de cette forme

$$\text{H}.\cos.(iv + i'v' + \text{K}).dv, \qquad (p)$$

i et i' étant des nombres entiers, H et K des constantes fonctions des élémens des orbites de la comète et de la planète perturbatrice.

Ces termes s'intègrent sans difficulté dans le cas où $i' = 0$; ils ne sont plus intégrables généralement lorsque i' n'est pas nul; mais quand la comète est dans la partie supérieure de son orbite, les termes de cette espèce sont considérablement plus petits que les précédens, en sorte qu'on peut presque toujours les négliger sans scrupule. Au reste, si l'on juge convenable de pousser plus loin l'approximation, on pourra le faire de la manière suivante.

Les deux équations (n) donnent

$$dv = \frac{r'^2dv'}{r^2}.\frac{\sqrt{a.(1-e^2)}}{\sqrt{a'.(1-e'^2)}}.$$

Le terme qu'il s'agit d'intégrer devient, en substituant cette valeur,

$$H.\frac{\sqrt{a(1-e^2)}}{\sqrt{a'(1-e'^2)}}.\int\frac{r'^2dv'}{r^2}.\cos(iv+i'v'+K).$$

Si, dans cette intégrale, on met pour $\frac{r'^2}{r^2}$, sa valeur

$$\frac{a'^2.(1-e'^2)^2.(1+e.\cos v)^2}{a^2.(1-e^2).[1+e'.\cos(v'-\varpi')]^2},$$

et qu'on remarque que e' est une très petite quantité, il est clair qu'on pourra la développer en une suite de termes de cette forme

$$H'.\int.\cos(lv+l'v'+K').dv'.$$

Ce terme peut encore s'écrire ainsi :

$$\frac{H'}{l'}.\int\cos(lv+K').d.\sin l'v'+\frac{H'}{l'}.\int\sin(lv+K').d.\cos l'v';$$

on aura donc, en intégrant,

$$H'.\int\cos.(lv+l'v'+K').dv'=\frac{H'}{l'}.\sin.(lv+l'v+K')$$
$$-\frac{H'l}{l'}\int.\cos(lv+l'v'+K').dv.$$

Si dans le dernier terme on substitue pour dv sa valeur, il devient

$$-\frac{H'l}{l'}.\frac{\sqrt{a(1-e^2)}}{\sqrt{a'(1-e'^2)}}.\int\frac{r'^2dv'}{r^2}.\cos.(lv+l'v'+K').$$

Ce terme est beaucoup plus plus petit que l'inté-

grale

$$H'.\int\cos(lv+l'v'+K').dv',$$

puisque $\frac{r'}{r}$ est supposé une très petite fraction, et que le facteur $\frac{\sqrt{a.(1-e^2)}}{\sqrt{a'.(1-e'^2)}}$ est aussi très petit; car $a.(1-e)$ est la distance périhélie de la comète, et cette distance est beaucoup moindre que a' relativement aux trois planètes supérieures, les seules dont on ait ordinairement à considérer l'action. On pourra donc supposer l'intégrale $H'.\int\cos(lv+l'v'+K').dv'$, à très peu près égale à $\frac{H'}{l'}.\sin.(lv+l'v'+K')$, et négliger l'autre partie de sa valeur. Si l'on voulait cependant y avoir égard, comme cette partie est absolument de même forme que l'intégrale $H\int\cos(iv+i'v'+K).dv$, on pourrait la développer comme elle en une suite de termes semblables au suivant,

$$H''.\int\cos.(sv+s'v'+K').dv',$$

que l'on intégrerait par la méthode que nous venons d'indiquer. En continuant ainsi, on diminuera à volonté l'erreur résultante des intégrales négligées, et l'on approchera d'aussi près que l'on voudra de la valeur de l'intégrale

$$H.\int\cos(iv+i'v'+K).dv.$$

Il ne s'agit donc, pour appliquer aux équations (F) la méthode d'intégration précédente, que de développer ces formules, ce qui ne demande plus que des subs-

titutions faciles. En joignant les valeurs de δa, δf, $\delta f'$, $\delta \zeta$, δp, δq qui en résulteront à celles qui se rapportent à la partie de R indépendante de R', on aura les altérations totales des élémens elliptiques de la comète dans la partie supérieure de son orbite.

39. Voici donc, d'après les résultats précédens, la marche qu'il faudra suivre pour déterminer généralement les perturbations d'une comète et fixer à l'avance l'époque de son retour au périhélie. Prenons pour exemple la comète de 1759. Les observations faites pendant ses apparitions en 1682 et en 1759, ont fourni toutes les données nécessaires pour déterminer les élémens de son orbite à ces deux époques. Elles ne donnent point directement, il est vrai, la valeur du grand axe; cette valeur dépend, comme nous l'avons vu, des perturbations que la comète a subies pendant la révolution de 1682 à 1759; mais on peut, dans le calcul de ces perturbations, regarder l'orbite comme une ellipse dont le grand axe répond à la durée observée de cette révolution; les quantités négligées seront de l'ordre du carré des forces perturbatrices. Partant donc des élémens de 1682, on déterminera leurs altérations ainsi que celle de l'anomalie moyenne, pour les six premiers signes d'anomalie excentrique, c'est-à-dire depuis $u = 0$ jusqu'à $u = 180°$; pour les six autres signes, il sera préférable de fixer l'origine de l'angle u au périhélie de 1759, et de remonter vers 1682, en faisant u négatif et en employant les élémens déduits des observations de 1759. Dans le troisième et le quatrième quarts de son ellipse, la comète étant beaucoup plus

ıée des planètes perturbatrices que dans les deux , on pourra prendre cette seconde moitié de e pour ce que nous avons nommé la *moitié eure*, et employer avec sûreté les formules qui iquent à ce cas. Dans les deux autres quarts on sage, pour calculer les altérations des élémens rbite, de la méthode des quadratures méca- s.

déterminera, par ce moyen, le grand axe de e qui répond au périhélie de 1682, et l'on en ıra celui qui se rapporte au périhélie de 1759. :commencera ensuite les mêmes opérations ; 1759 jusqu'au prochain retour de la comète rihélie; mais comme l'époque de ce passage :onnue, on pourra, pour plus d'exactitude, er l'orbite de 30 en 30 degrés, en employant chaque signe les élémens de l'ellipse qui résulte lculs précédens. Lorsqu'on aura ainsi déterminé riations de l'anomalie moyenne et des autres élé- de l'orbite depuis $u = 0$ jusqu'à $u = 360°$, on ıclura l'époque du prochain retour de la comète périhélie et les élémens de son orbite à cette ıe.

CHAPITRE IV.

Application de la théorie précédente aux comètes périodiques de 1682, *de* 1819 *et de* 1825.

40. Le système du monde renferme aujourd'hui trois comètes dont le retour périodique est constaté. La plus anciennement connue est la comète de 1682. Halley, qui avait le premier remarqué son identité avec les comètes aperçues en 1531 et 1607, par une évaluation approximative et purement conjecturale des altérations qu'elle devait éprouver dans la période suivante, en vertu de l'action de Jupiter et de Saturne, annonça son retour pour la fin de l'année 1758 ou le commencement de 1759. Clairaut tenta de soumettre à des calculs rigoureux cette importante question; il appliqua à la détermination des perturbations de cette comète la solution qu'il avait donnée du problème des trois corps, et après un travail immense qui embrasse trois révolutions de la comète, il fixa l'époque de son passage par le périhélie au 4 avril 1759. On sait que la prédiction du géomètre se réalisa à quelques jours près; et encore l'écart des résultats de l'observation et de la théorie aurait-il été diminué sans doute, si Clairaut eût employé dans ses calculs la

valeur de la masse de Saturne, telle que nous la connaissons aujourd'hui, et s'il avait eu égard à l'action de la planète Uranus, dont on ignorait de son temps l'existence.

Les deux autres comètes, à l'égard desquelles s'est reproduit de nos jours le phénomène si remarquable de leur réapparition au périhélie après une ou plusieurs révolutions, parcourent des ellipses beaucoup moins allongées que la précédente. La première accomplit sa révolution en 1204 jours à peu près. Ce fut en 1819 qu'elle fut reconnue, pour la première fois, comme comète périodique. En examinant les élémens d'une comète qu'on venait d'observer au commencement de cette année, M. Arago remarqua qu'ils avaient une grande analogie avec ceux d'un astre de même nature aperçu en 1805. La même observation fut faite, en Allemagne, par M. Olbers, qui reconnut en outre que cette comète avait déjà été vue précédemment en 1759 et 1789. D'après cela, le temps périodique de cet astre ne pourrait être que d'un petit nombre d'années. M. Enke, astronome de Gotha, entreprit de représenter par une orbite elliptique les observations de 1805 et 1819, et les élémens qu'il détermina se trouvèrent avoir entre eux plus d'analogie encore que les élémens paraboliques; alors il ne resta plus de doute qu'ils n'appartinssent à une même comète, dont la période était de trois ans et trois mois à peu près, et qui, dans l'intervalle de 1805 à 1819, avait accompli quatre révolutions entières pour revenir à son périhélie. D'après la rapidité de cette révolution, on aurait pu considérer cet astre comme

une nouvelle planète ; mais on a continué à le ranger parmi les comètes, tant à raison de ses apparences physiques que parce qu'il n'est pas visible pour nous dans toutes les parties de son orbite. Depuis cette importante découverte, plusieurs géomètres se sont occupés de la détermination des dérangemens que cette comète a dû éprouver dans ses diverses révolutions depuis 1805 jusqu'à 1829, époque de sa dernière apparition, et ils sont parvenus à représenter sa marche dans cet intervalle avec une précision à laquelle il paraissait difficile que la théorie pût atteindre. Mais le même succès n'a pas couronné leurs efforts lorsqu'ils ont tenté de remonter aux passages antérieurs à 1805, et les orbites elliptiques résultant du calcul des perturbations n'ont pu que satisfaire imparfaitement aux observations de 1795 et 1786. M. Enke a pensé que pour représenter la marche de la comète dans cet intervalle, il fallait recourir à l'hypothèse d'un milieu éthéré dont la résistance altère insensiblement les élémens de son orbite, et cette idée a donné encore à la théorie de cet astre un plus haut degré d'intérêt. Sans doute si les corps célestes étaient soumis à cette nouvelle force perturbatrice dont aucun autre phénomène ne nous a révélé l'existence, son influence serait beaucoup plus sensible sur les comètes que sur les planètes, à cause du peu de densité de la matière qui les compose, de même que nous voyons à la surface de la Terre la résistance de l'air altérer d'autant plus les mouvemens des corps pesans, que leur densité est plus petite, mais les résultats des calculs qu'on a faits à cet égard, et

les hypothèses sur lesquelles ils sont fondés, nous paraissent, les premiers trop peu concluans, et les secondes trop arbitraires pour décider une pareille question, et ce n'est qu'après un grand nombre de révolutions de la comète de 1819 et lorsque sa théorie aura été suffisamment approfondie, qu'un point aussi important de la Physique céleste pourra être établi avec quelque certitude.

Enfin, c'est dans ces derniers temps seulement que le système du monde s'est enrichi d'une nouvelle comète périodique dont la révolution est de six ans trois quarts à peu près. Elle fut aperçue d'abord le 27 février 1826, en Bohême, par M. Biela; le 9 mars suivant, à Marseille, par M. Gambart, et le 10 à Altona, par M. Clausen. Les élémens paraboliques conclus des premières observations de cet astre avaient une ressemblance remarquable avec ceux de deux comètes observées en 1772 et 1806. MM. Clausen et Gambart, qui paraissent se partager l'honneur d'avoir fait simultanément ce rapprochement, tentèrent alors de calculer le mouvement de ces trois comètes en leur appliquant une orbite elliptique, et après quelques essais, ils trouvèrent, chacun de leur côté, une ellipse qui en représentait les observations assez exactement pour ne plus laisser aucun doute sur leur identité.

Tel est l'état actuel de l'Astronomie relativement aux comètes dont la révolution est connue. Il n'est pas douteux que l'attention assidue qu'on apporte maintenant aux observations astronomiques n'en augmente encore le nombre dans la suite; mais il est

à présumer que la découverte des comètes à longue période, comme celle de 1682, sera toujours très rare, surtout si l'on remarque qu'on n'observe ces astres avec assez de soin et assez de précision que depuis deux siècles. Les incertitudes dont les observations précédentes sont affectées doivent même souvent tromper les conjectures qu'elles ont fait naître; c'est ce qui est arrivé, en effet, pour la comète de 1532, observée par Appien. Les rapports qui existent entre ses élémens et ceux d'une comète observée en 1661, par Hévélius, avaient fait penser qu'ils appartenaient à un même astre dont la révolution était de 128 années environ, et en conséquence on attendait le retour de cette comète vers 1789; mais elle n'a pas reparu.

Nous regrettons que les bornes de cet ouvrage ne nous permettent pas de développer, dans toute leur étendue, les résultats de l'application de la théorie exposée dans le chapitre précédent aux trois comètes dont nous venons de tracer l'histoire; mais du moins, en présentant le résumé de ces calculs, nous en indiquerons la marche avec assez de détails pour éviter tout embarras à ceux qui voudraient les vérifier ou les pousser plus loin, en considérant de nouvelles révolutions de ces comètes.

Détermination du prochain retour au périhélie de la comète de 1759.

41. Les premières observations un peu certaines qu'on ait de cette comète se rapportent à son apparition

en 1531 ; elle repassa depuis à son périhélie en 1607, 1682 et 1759. Les durées de ces trois révolutions sont, comme on voit, très inégales. La première période, en effet, était de 76 ans et deux mois à peu près, ou de 27811 jours; la seconde, de 27352 jours, et plus courte par conséquent de 459 jours que la précédente; enfin, la dernière, la plus longue des trois, était de 27937 jours. Il serait donc impossible de rien conclure sur les retours futurs de cette comète à son périhélie sans le secours de la théorie, et la détermination des perturbations qu'elle éprouve par l'action des planètes peut seule nous mettre en état de prédire l'instant de sa prochaine apparition.

Il faut, pour cela, commencer, comme nous l'avons vu n° 39, par déterminer le moyen mouvement diurne de la comète au périhélie de 1759, ce qui exige que l'on calcule les altérations qu'ont subies les élémens de son orbite pendant la période de 1682 à 1759. Les seules planètes dont l'action sur la comète ait pu être sensible dans cette révolution sont Jupiter, Saturne et Uranus. Les mêmes planètes ont encore influé sur son mouvement dans la révolution subséquente; mais dans l'année 1759, la comète s'étant beaucoup approchée de la Terre, il est devenu indispensable d'avoir égard à cette nouvelle planète dans le calcul des perturbations, et l'on verra, en effet, qu'il en résulte une diminution de quelques jours dans la durée de la période que nous nous proposons de déterminer. Nous n'aurons donc à nous occuper, dans ce qui va suivre, que de l'action perturbatrice de ces quatre planètes : les calculs qui en

résulteront exigeraient des développemens très étendus; mais comme ils ont été faits avec beaucoup de soin par M. Damoiseau, et que nous avons eu récemment l'occasion de les reprendre en entier et d'en vérifier l'exactitude, nous nous bornerons ici à indiquer la marche et les résultats de ces calculs, et nous renverrons, pour les détails, au Mémoire de M. Damoiseau, qui a mérité le prix que l'Académie de Turin avait proposé en 1812 sur ce sujet, et qui est imprimé dans les Mémoires de cette Académie, pour l'année 1820.

42. Dans le calcul des perturbations qui se rapportent à la révolution de 1682 à 1759, nous regarderons l'orbite de la comète comme une ellipse dont le grand axe répond à la durée observée de cette révolution, que nous supposerons de 27937 jours. En nommant donc $2a$ cet axe, et $N=\frac{1}{a^{\frac{3}{2}}}$ le moyen mouvement diurne qui lui correspond, on aura

$$N=\frac{360°}{27937}=46'',39009, \quad a=18.0186.$$

Les autres élémens de l'orbite qui se rapportent tant au périhélie de 1682 qu'à celui de 1759, résultent directement des observations faites à ces deux époques. Nous supposerons, pour partir des mêmes données que M. Damoiseau,

En 1682.

Instant du passage au périhélie 1682.	15^{jours},24002(*)
Rapport de l'excentricité au demi grand axe....................	0.967629
Lieu du périhélie................	302° 53′
Longitude du nœud..............	51.16
Inclinaison de l'orbite............	17.56

Sens du mouvement, rétrograde.

En 1759.

Instant du passage au périhélie 1759.	13^{jours},08976
Rapport de l'excentricité au demi grand axe....................	0.967554
Lieu du périhélie................	303° 8′
Longitude du nœud ascendant.....	53.38
Inclinaison de l'orbite............	17.40

Sens du mouvement, rétrograde.

Pour apporter dans les calculs le plus de précision possible, il sera bon d'employer, dans la première moitié de la révolution de 1682 à 1759, les élémens de l'orbite relatifs au périhélie de 1682, et dans la seconde, les élémens qui se rapportent au périhélie de 1759.

Il ne s'agit plus maintenant, pour déterminer le prochain retour au périhélie de la comète de 1759, que de substituer, dans les formules du chapitre

(*) Le temps est partout exprimé en jours moyens comptés de minuit au méridien de Paris.

troisième, les valeurs numériques précédentes, à la place des quantités qui les représentent, ainsi que celles qui se rapportent uniquement aux planètes perturbatrices, et qui seront données par les tables astronomiques. Lorsqu'on aura ainsi déterminé les altérations différentielles qu'éprouve chacun des élémens de l'orbite par l'action des forces perturbatrices, on aura, par la formule (P), les altérations totales de ces élémens, correspondantes à une variation donnée de l'anomalie excentrique. Dans l'application de cette formule, on fera varier l'anomalie excentrique de degré en degré pour Jupiter; mais comme les autres planètes que nous considérons exercent sur la comète des actions beaucoup moins sensibles, nous écarterons davantage, dans ce cas, les ordonnées de la courbe parabolique, et nous ferons varier cette anomalie de deux degrés en deux degrés pour Saturne et de six degrés en six degrés pour Uranus.

43. Pour donner un exemple de ces calculs, proposons-nous de déterminer les altérations des divers élémens de l'orbite résultant de l'action de Jupiter sur la comète pendant la période de 1682 à 1759, et correspondant à un arc donné de l'anomalie excentrique.

Par les tables de Delambre, on aura

Anomalie moyenne de ♃ au moment du périhélie de la comète en 1682.	291° 17′
Lieu de l'aphélie..................	189.16.46″
Longitude du nœud..............	97.13.54
Inclinaison de l'orbite.............	1.19.15.

En considérant le triangle intercepté sur la sphère celeste, par l'écliptique et les orbites de Jupiter et de la comète, on trouvera aisément, d'après les données précédentes,

Lieu du nœud ascend. de ♃ sur l'orbite de la comète...........	$54^\circ 12' 10''$
Lieu du nœud ascend. de la comète sur l'orbite de ♃..............	$54.10.37$
Inclinaison mutuelle des deux orbit.	$18.52.29$;

d'où l'on conclura d'abord

$$\lambda \ldots \; 111^\circ 19' 10'', \quad \gamma \ldots \; 18^\circ 52' 29''.$$

Si de la longitude de l'aphélie de Jupiter, on retranche l'angle $54^\circ 10' 37''$, la différence sera la quantité qu'il faut ajouter aux anomalies vraies de cette planète, comptées de l'aphélie, pour avoir sa longitude comptée du nœud ascendant de son orbite sur celle de la comète; cet angle sera donc ainsi de $135^\circ 6' 9''$.

Cela posé, on aura pour déterminer les coordonnées de la comète rapportées au plan et au grand axe de son orbite, ainsi que le temps écoulé depuis le passage au périhélie de 1682, les formules suivantes :

$$x = 18.0186.\cos u - 17.45532, \quad y = 4.54747.\sin u;$$
$$t = (444,63071).(u - 0.967629.\sin u);$$

et pour déterminer les coordonnées de la planète perturbatrice, rapportées au même plan et au même axe, on aura

$$x' = (0.363567).r'\cos v' - (0.881476).r'\sin v',$$
$$y' = -(0.931568).r'\cos v' + (0.344018).r'\sin v',$$
$$z' = (0.323500).r'\sin v'.$$

Ces formules donneront les valeurs des coordonnées x, y, x', y', z' et du temps t correspondant à un arc quelconque d'anomalie excentrique compris entre 0 et 180°. Supposons qu'il s'agisse de déterminer ces valeurs relatives à l'époque qui répond au dixième degré de cette anomalie, en faisant $u = 10°$, dans les premières formules, on aura d'abord

$$x = 0.30954, \quad y = 0.78966, \quad t = 28^{j},9272.$$

On calculera ensuite le lieu de la planète relativement à la même époque.

On aura, par les tables de Delambre, en n'ayant égard qu'à l'équation du centre et à la variation séculaire,

Anomalie moy. ♃ au périh.^{e}	291° 17′		
Mouv. m. p. 10° d'ano. exc.	2.24		
Ano. moy. ♃ pour l'ins. don.	293.41	r'...	5.30639
Équation du centre........	+4.55		
Anomalie vraie de ♃.....	298.36		
Const. à ajout. aux anom. vr.	135. 6		
v'........	73.42.		

Si dans les formules qui déterminent les coordonnées de la planète perturbatrice, on substitue ces valeurs, on trouvera

$$x' = -5.03092,\quad y' = 0.36470,\quad z' = 1.64761.$$

A l'aide de ces valeurs et de celles de x et y, on formera aisément les suivantes :

$$\rho = 5.60497,\quad X = 0.003342,\quad Y = -0.004854.$$

Il ne s'agit plus maintenant que de substituer à la place de x, y, X et Y leurs valeurs numériques dans les formules du n° 32, après les avoir réduites en nombres. Reprenons d'abord la formule (7) qui détermine l'altération du moyen mouvement, m' désignant ici la masse de Jupiter; on aura

$$m' = \frac{1}{1070.5},$$

et cette formule, en y substituant 1° ou 0.017453 à la place de du, et multipliant tous les termes par $\frac{360 \times 3600''}{365.25638}$ pour les réduire en secondes, deviendra

$$dn = (0'',73668).\sin u.X - (0'',18592).\cos u.Y.$$

Si l'on fait les mêmes substitutions numériques dans les formules qui donnent les altérations du périhélie et de l'époque, et qu'on réduise en secondes tous les termes, on aura

$$d\varpi = (13'',77075).y.(xY - yX) - (15'',80436).rX,$$
$$d\varepsilon - d\varpi = -(0.25238).d\varpi - (6'',72583).r.(xX + yY).$$

Au moyen de ces formules, en faisant $u = 10°$, on trouve

$$dn = +0''0005868\,1, \qquad t\,dn = +0''016975,$$
$$d\varpi = -0,089833, \qquad d\epsilon - d\varpi = +0,038646.$$

44. On pourra calculer, de cette manière, les valeurs successives de dn, $d\varpi$, $d\epsilon$, depuis 0 jusqu'à 180 degrés d'anomalie excentrique; en partant ensuite des élémens de 1759, et faisant u négatif, on calculera les mêmes valeurs depuis $u=0°$ jusqu'à $u=-179°$; on substituera ensuite ces quantités dans la formule (P), et des résultats ainsi obtenus on formera le tableau suivant :

Résultats de l'intégration par quadratures des altérations différentielles du moyen mouvement, du périhélie, et de l'anomalie moyenne, présentant les altérations totales de ces élémens, depuis 1682 jusqu'à 1759.

Planèt.	$\int dn.$	$T\int dn.$	$\int t\,dn.$	$\int dt\int dn.$	$\int d\varpi.$	$\int d\epsilon-\int d\varpi.$	$\int d\zeta.$
♃	+0"315794	+ 8822"34	−5286"98	+14109"32	−263"80	+2078"59	+16187"9
♄	+0.031985	+ 893,57	+ 737,52	+ 156,05	− 92,71	+ 361,66	+ 517,7
♅	+0.013138	+ 367,03	+ 137,64	+ 229,39	− 9,83	+ 94,92	+ 324,3
Total..	+0.360917	+10082,94	−4411,82	+14494,76	−366,34	+2535,17	+17029,9

A l'aide de ces valeurs, il est facile de déterminer le moyen mouvement diurne de la comète à l'instant du passage au périhélie de 1759. En effet, si dans l'équation

$$\zeta = \mathrm{N}t + \int d\zeta,$$

on suppose

$$\zeta = 1296000'', \quad t = \mathrm{T} = 27937^j, \quad \int d\zeta = +17029'',93,$$

on aura

$$\mathrm{N} = 45'',78051.$$

C'est la valeur du moyen mouvement diurne au périhélie de 1682; en nommant N′ cette valeur au périhélie de 1759, on aura

$$\mathrm{N}' = \mathrm{N} + \int dn = 46'',14143.$$

De là il est aisé de conclure les valeurs des demi grands axes a et a' qui répondent aux mêmes époques; on trouvera ainsi

$$a = 18.1782, \qquad a' = 18.0833.$$

45. Avec cette valeur de a, on pourrait recommencer le calcul des altérations des élémens de l'orbite pendant la période de 1682 à 1759, et l'on obtiendrait sans doute des résultats plus exacts encore que les précédens; mais la longueur de ces opérations et le peu d'effet qu'on en doit attendre font qu'il y a bien peu de calculateurs qui soient tentés de l'entreprendre. La valeur de a', jointe aux valeurs des autres élémens de l'orbite relatifs au périhélie de 1759, fournit toutes les données nécessaires à la détermination des perturbations de la comète pendant la période qui s'écoulera de 1759 jusqu'à sa prochaine apparition. M. Damoiseau est parti, pour ce calcul, des élémens

suivans, qu'il a sans doute jugés plus exacts que ceux que nous avons rapportés plus haut. Cette précision, qui est peu importante lorsqu'on se propose seulement de fixer le retour futur d'une comète à son périhélie, le devient beaucoup lorsqu'il s'agit en même temps de déterminer les élémens de son orbite à cette époque.

Élémens de l'orbite en 1759.

Temps de passage au périh. 1759.	13^{mars},16
Rapport de l'excentricité au demi grand axe....................	0.967705
Lieu du périhélie..............	303° 14′
Longitude du nœud ascendant....	53.48
Inclinaison de l'orbite...........	17.40
Demi grand axe.................	18.08327.

En déterminant ensuite les altérations de ces élémens, pendant la période commencée en 1759, par des opérations semblables à celles qui ont servi à calculer leurs valeurs pendant la période de 1682 à 1759, et en rectifiant, pour plus d'exactitude, l'ellipse de la comète de 30 en 30 degrés d'anomalie excentrique, le même astronome est arrivé aux résultats suivans,

Résultats de l'intégration par des quadratures des altérations différentielles du moyen mouvement, du périhélie et de l'anomalie moyenne, présentant les altérations totales de ces élémens depuis 1759 jusqu'au prochain retour de la comète.

Planèt. perturb.	$\int dn.$	$t\int dn.$	$\int t dn.$	$\int dt \int dn.$	$\int d\varpi.$	$\int d\varepsilon - \int d\varpi.$	$\int d\zeta.$
♃	+0″439153	+12299″36	+12381″88	− 82″52	−836″56	+1624″75	+1542″23
♄	−0,089998	− 2520,58	− 3731,82	+1211,24	− 83,64	+ 751,75	+1962,99
♅	+0,008482	+ 237,56	+ 135,83	+ 101,73	− 21,50	+ 107,48	+ 209,21
Alt. tot.	+0,357637	+10016,34	+ 8785,89	+1230,45	−941,70	+2483,98	+3714,43

46. Il est facile maintenant de fixer l'époque du prochain retour de la comète à son périhélie; en effet, si dans l'équation

$$\zeta = N't + \int d\zeta,$$

on suppose

$$\zeta = 360°,\ t = T',\ N' = 46'',14142 \text{ et } \int d\zeta = +3714'',43,$$

on aura

$$T' = \frac{360° - 3714'',43}{N'} = 28087^j,56 - 80^j,50 = 28007^j,06.$$

Ainsi l'intervalle compris entre le passage au périhélie en 1759 et le passage suivant sera de $28007^j,06$,

ce qui, à compter du 13 mars 1759, donne le 17 novembre pour l'instant de ce passage.

Nous n'avons point eu égard dans la détermination précédente à l'action de la Terre qui, par sa proximité de la comète en 1759, paraît devoir influer sur la durée du temps périodique pendant la révolution suivante. Burckart a fait ce calcul (*Connaissance des Tems pour* 1819), et il a trouvé que cette action altérait de $+0'',02679$ à peu près le moyen mouvement diurne de la comète au périhélie de 1759; en sorte qu'en corrigeant d'après ce résultat les valeurs que nous avons supposées au mouvement moyen et au grand axe de l'orbite à cette époque, on aurait

$$N' = 46'',16821, \quad a' = 18.0763.$$

Telles sont donc les valeurs qu'il aurait fallu employer dans le calcul des perturbations de 1759 à 1835; mais les différences qui en proviendraient dans les résultats que nous avons présentés seraient sans doute peu considérables. En substituant pour N' sa valeur précédente, on aura

$$T' = \frac{360^\circ - 3714'',43}{N'} = 28071^j,26 - 80^j,45 = 27990^j,81.$$

Ainsi l'action de la Terre aura pour effet de diminuer de 16 jours à peu près la durée de la révolution que la comète accomplit en ce moment, et son passage au périhélie aura lieu le 31,2 octobre 1835.

Si l'on compare la durée de la révolution que nous venons d'examiner à celle de la révolution qui l'a

précédée, on voit qu'elle la surpasse de 54 jours à peu près, en sorte que la révolution actuelle de la comète est la plus longue de celles qui ont été observées depuis 1531.

47. Déterminons maintenant les élémens de l'orbite à l'époque du passage de la comète au périhélie en 1835.

En désignant par N″ le moyen mouvement diurne à cette époque, et par a'' le demi grand axe qui lui correspond, on aura d'abord

$$N'' = N' + \int dn = 46'',52585;\quad a'' = 17,98355.$$

En calculant ensuite d'après les principes précédens les altérations de l'excentricité, de l'inclinaison et du nœud, dues à l'action des forces perturbatrices pendant la période de 1759 à 1835, on forme le tableau suivant.

Altérations de l'excentricité et des quantités qui déterminent la position de l'orbite, pendant la période de 1759 à 1835.

Planètes perturbatrices.	$\int de.$	$\int dp.$	$\int dq.$
♃	− 0.00034621	− 0.000129115	− 0.00167888
♄	+ 0.00011870	− 0.00010041	− 0.00028994
♅	− 0.00002407	− 0.00000682	+ 0.00002516
Altérations total..	− 0.00025158	− .000139838	− 0.00194366

En partant donc des élémens relatifs au périhélie de 1759 qui ont été rapportés n° 45, et en nommant e' le rapport de l'excentricité au demi grand axe en 1835, on aura

$$e' = e + \int de = 0.967453,$$

et la distance périhélie sera 0.58552, à la même époque.

Les deux équations

$$\tang \varphi \sin \alpha = p, \quad \tang \varphi \cos \alpha = q,$$

donneront ensuite, en observant que $\sin \alpha$ doit être de même signe que p et $\cos \alpha$ de même signe que q,

$$\varphi = 8'14'', \quad \alpha = 215°44'0''.$$

Les angles φ et α représentent l'inclinaison de l'orbite vraie de la comète et la longitude de son nœud ascendant sur le plan de son orbite en 1759; pour en conclure la position de cette orbite, par rapport à l'écliptique, considérons le petit triangle formé par les plans de l'écliptique, de l'orbite de la comète en 1759, et de son orbite vraie; désignons par A, B, 180°—C les trois angles de ce triangle, et par a, b, c les côtés opposés à ces angles, C étant l'inclinaison de l'orbite vraie de la comète à l'écliptique, et b l'arc compris sur ce plan entre cette même orbite et l'orbite fixe de 1759. On aura dans ce triangle

$$\cos C = \cos A \cos B - \cos b \sin A \sin B.$$

L'angle B représentant, d'après l'hypothèse, l'inclinai-

son de l'orbite vraie sur l'orbite fixe, B sera une très petite quantité, et l'on aura, à très peu près,

$$\cos C = \cos(A + B\cos c),$$

et par conséquent

$$C = A + B\cos c;$$

on aura ensuite

$$\sin b = \frac{B\sin c}{\sin C}.$$

Observons maintenant que l'angle α déterminé précédemment est supposé compté du périhélie de la comète et dans le sens de son mouvement; la longitude du nœud ascendant de l'orbite vraie de la comète, sur son orbite fixe, comptée du même point dans l'ordre des signes sera donc $144°16'$. Si l'on ajoute cet arc à la longitude du périhélie en 1759, et qu'on en retranche la longitude du nœud à la même époque, l'angle qui en résultera sera la longitude du nœud ascendant de l'orbite vraie de la comète sur son orbite fixe, comptée du nœud ascendant de cette dernière orbite sur l'écliptique, angle que nous avons désigné par c; on aura ainsi

$$A = 17°40', \quad c = 33°42', \quad B = 8'14'',$$

d'où l'on conclura

Inclinaison de l'orbite sur l'écliptique, en 1835 ou C..........	$17°46'50''$.
Mouvement direct du nœud ascendant, sur l'écliptique ou b	$14'58''$.

En ajoutant à l'altération du nœud $1°4'1''$, pour la précession des équinoxes dans l'intervalle de 76 ans, on aura sa variation par rapport à l'équinoxe mobile.

Nous avons trouvé précédemment pour la variation de la longitude du périhélie

$$\int d\omega = -941'',7.$$

Cet angle est compté, comme l'angle α, du périhélie de la comète et en sens inverse des signes; la longitude du périhélie, comptée du nœud ascendant de l'orbite, est donc augmentée de $941'',7$ par le mouvement propre de ce point pendant la période de 1759 à 1835; mais dans cet intervalle la ligne des nœuds se rapproche du périhélie, et la même longitude est diminuée du mouvement du nœud ascendant sur l'écliptique projeté sur l'orbite primitive de la comète. En désignant donc par g la variation totale du périhélie par rapport au nœud, et en employant les dénominations précédentes, on aura

$$g = \int d\omega - b . \cos A,$$

d'où l'on conclura

Distance du nœud ascendant au périhélie.................... $249° 27' 20''$.

Au moyen des valeurs précédentes, et en partant des élémens de la comète relatifs au périhélie de 1759, on a formé le tableau suivant.

Élémens de la comète en 1835.

Instant du passage au périhélie 31,2 octobre 1835.	
Demi-grand axe..................	17.98355
Rapport de l'excentricité au demi grand axe..................	0.967453
Lieu du périhélie sur l'orbite.....	304° 34′ 19″
Longitude du nœud ascendant....	55. 6.59
Inclinaison....................	17.46.50.

Sens du mouvement rétrograde.

Détermination des perturbations de la comète périodique de $3^{ans},3$.

48. Cette comète paraît avoir été aperçue pour la première fois dans les années 1786 et 1795; mais les observations faites à ces deux époques ont été ou trop inexactes ou trop peu nombreuses pour en conclure l'orbite. Nous partirons donc ici des observations relatives à 1805, et nous examinerons les perturbations de la comète depuis son passage au périhélie en 1805 jusqu'à l'époque actuelle.

Dans la première période, c'est-à-dire dans l'intervalle écoulé entre les passages au périhélie en 1805 et en 1819, on peut regarder l'orbite comme une ellipse dont le grand axe répond à la durée moyenne des quatre révolutions que la comète a accomplies dans cet intervalle, et que nous supposerons de $1203^j,687$. On aura ainsi, en nommant a le demi grand axe de l'orbite et N le moyen mouvement diurne, au périhélie de 1805

$$N = \frac{360^\circ}{1203,687} = 1076'',6925, \quad a = 2.214507.$$

Dans le calcul des perturbations de 1819 à 1822, on peut regarder l'orbite comme une ellipse dont le grand axe répond à la durée observée de cette révolution, qui est de $1212^j,742$, et l'on aura pour cette période

$$N' = \frac{360^\circ}{1212,742} = 1068'',6525, \quad a' = 2.225600.$$

Nous ferons observer toutefois qu'il serait plus exact d'employer à la place de ces valeurs celles du moyen mouvement et du grand axe résultant du calcul des perturbations précédentes.

Le tableau suivant présente les autres élémens des orbites elliptiques conclues des observations de 1805 et de 1819.

Passage au Périhélie.	Excentricit.	Longitude du Périhélie.	Longitude du Nœud.	Inclinaison de l'orbite.
1805, novemb.. 22,006	0.8461753	156°47′ 24″	334°20′ 11″	13°33′ 30″
1819, janvier... 27,752	0.8490883	157. 5.53	334.43.37	13.38.42

Les valeurs que renferme ce tableau, jointes à celles qui dépendent des planètes perturbatrices, et qu'on trouvera dans les tables, fournissent toutes les données nécessaires pour déterminer les perturba-

tions du mouvement de la comète, de 1805 jusqu'à 1822. On partagera à cet effet, comme précédemment, la courbe décrite par la comète en parties pour chacune desquelles on déterminera l'effet des forces perturbatrices, sur chacun des élémens de son orbite, et l'on aura ensuite par la formule (P), n° 34, les altérations totales de ces élémens correspondantes à l'arc d'anomalie excentrique que l'on aura considéré.

Dans l'application de cette formule à la comète dont il s'agit, il suffira de faire varier l'anomalie excentrique de 10° en 10°; dans le cas cependant où la planète perturbatrice s'approchera beaucoup de la comète, comme cela est arrivé dans la révolution de 1819 à 1822, relativement à Jupiter, il sera bon de resserrer ces intervalles et de faire varier l'anomalie excentrique de 5° en 5°.

Jupiter, la Terre et Vénus sont les seules planètes qui aient pu avoir quelque influence sur le mouvement de la comète pendant la période de 1805 à 1822; encore pourra-t-on se contenter de considérer l'action de ces deux dernières planètes dans la partie seulement de cette période où la proximité de la comète a rendu leur influence plus sensible.

49. Le tableau suivant présente les résultats du calcul que nous venons d'indiquer.

Altérations du moyen mouvement et de l'anomalie moyenne pendant la période de 1805 *à* 1822.

Périodes.	Intervalles observés.	Planètes perturbatrices.	$\int dn.$	$\int d\zeta.$
1805 à 1819..	4814*j*,746	♃.........	+ 3″5889	+ 15859″38
		♀ en 1809	− 0,1313	− 476,76
		en 1818	− 0,1105	− 4,97
		♁ en 1809	− 0,0178	+ 64,01
		en 1818	+ 0,0735	− 5,14
		Total.....	+ 3,2914	+ 15436,52
1819 à 1822..	1212*j*,742	♃.........	− 7″4349	− 9939″38
		♀ en 1819	+ 0,0716	+ 81,26
		Total.......	− 7,3633	− 9858,12

Désignons respectivement par n, n', n'' le moyen mouvement diurne de la comète aux périhélies de 1805, 1819 et 1822, et par T et T′ les intervalles de temps qui séparent ses trois passages en ces points. Par le calcul des perturbations de la période de 1805 à 1819, on aura

$$n = \frac{360^\circ \times 4 - 15436'',52}{\mathrm{T}} = 1076'',6925 - 3'',2061 = 1073'',4864,$$

d'où l'on conclura

$$n' = 1073'',4864 + 3'',2914 = 1076'',7778,$$
$$n'' = 1073'',4864 + 3'',2914 - 7'',3633 = 1069'',4145.$$

Par la période de 1819 à 1822, on aura

$$n' = \frac{360° + 9858'',12}{T'} = 1068'',6525 + 8'',1288 = 1076'',7813,$$

$$n'' = 1076'',7813 - 7'',3633 = 1069'',4180,$$

$$n = 1076'',7813 - 3'',2914 = 1073'',4899.$$

Si l'on réunit les deux périodes précédentes, en remarquant qu'au périhélie de 1819 on avait $n' = n + 3'',2914$, on trouve d'abord pour l'altération de l'anomalie moyenne, dans l'intervalle qui sépare les périhélies de 1805 et 1822,

$$15436'',52 + 3'',2914T' - 9858'',12 = 9570'',02,$$

et l'on en conclura

$$n = \frac{360° \times 5 - 9570'',02}{T + T'} = 1075'',0745 - 1'',5877 = 1073'',4868,$$

$$n' = 1073'',4868 + 3'',2914 = 1076'',7782,$$

$$n'' = 1073'',4868 + 3'',2914 - 7'',3633 = 1069,4149.$$

En rassemblant les valeurs précédentes de chacune des quantités n, n', n'', conclues des trois passages observés, on aura

Périodes.	n	n'	n''
1805 à 1819	1073''4864	1076''7778	1069''4145
1819 à 1822	1073,4899	1076,7813	1069,4180
1805 à 1822	1073,4868	1076,7782	1069,4149.

Les différences 0'',0035, 0'',0031 et 0'',0004 de ces valeurs sont de l'ordre des quantités négligées.

Au moyen des résultats précédens, concluons des passages observés en 1805 et 1819, l'époque du retour de la comète en 1822. On a, relativement à cette période, $n' = 1076'',7778$, par conséquent,

$$T' = \frac{360^\circ + 9858'',12}{n'} = 1203^j,591 + 9^j,155 = 1212^j,746.$$

Les observations ont donné $T' = 1212^j,742$; on ne pouvait attendre de la théorie une plus grande précision.

Les perturbations de la comète pendant la période de 1819 à 1822 ont été, comme on voit, très considérables, puisqu'elles ont retardé de neuf jours son passage au périhélie. M. Enke est le premier parvenu à ce résultat, qui l'a mis à même de fixer à l'avance l'époque du retour de la comète à son périhélie en 1822. Il annonça en même temps que, d'après ses déclinaisons, elle ne serait pas visible en Europe, et que, pour l'observer, il faudrait se transporter dans l'hémisphère austral. La comète, en effet, revint au périhélie en mai 1822, et c'est d'après les observations faites à Paramatta, dans la Nouvelle-Hollande, qu'on a conclu les élémens de son orbite à cette époque.

50. En partant de ces élémens, que l'on trouvera plus bas, nous avons calculé les altérations du moyen mouvement et de l'anomalie moyenne, pendant les deux périodes suivantes. Dans cet intervalle, la comète n'éprouve que de très légères perturbations, et l'on doit, par conséquent, attendre d'autant plus de précision des résultats qui s'y rapportent.

térations du moyen mouvement et de l'anomalie moyenne de 1822 à 1829.

'ériodes.	Intervalles observés.	Planètes perturbatrices.	$\int dn$.	$\int d\zeta$.
2 à 1825..	$1211^j,290$	♃........	+ 0",7026	+ 381",46
		♁ en 1822	− 0,0494	− 56,90
		Total..	+ 0,6532	+ 324,56
5 à 1829..	....	♃.........	− 0,4390	− 702,42
		♄.........	+ 0,0256	+ 10,43
		♁ en 1828.	− 0,0986	− 6,90
		Total.	− 0,5120	− 698,89

En nommant n''' et n^{iv} les valeurs du moyen mou-
nent diurne aux périhélies de 1825 et 1829, T'',
' les durées des révolutions de 1822 à 1825 et de
25 à 1829, et prenant pour n' la valeur moyenne
39",4158 qui résulte de la comparaison des trois
·iodes calculées précédemment, on aura

$$= \frac{360^\circ - 324'',56}{n''} = 1211^j,8766 - 0^j,3035 = 1211^j,5731.$$

; observations de M. Valz donnent $T'' = 1211^j,290$.
ur concilier ces deux résultats, il faudrait presque
ıbler l'altération de l'anomalie moyenne pendant
ɔériode que nous considérons, ce qui paraît inad-
ssible.

Il s'agit maintenant de déterminer l'époque du retour de la comète en 1829. On aura d'abord pour le moyen mouvement diurne au périhélie de 1825,

$$n^{\prime\prime\prime} = 1069'',4158 + 0'',6532 = 1070'',0690,$$

et par conséquent

$$T^{\prime\prime\prime} = \frac{360^\circ + 698'',89}{n^{\prime\prime\prime}} = 1211^j,1364 + 0^j,6531 = 1211^j,7895.$$

Cet intervalle compté à partir du 16,7836 sept. 1825, époque du passage au périhélie, répond au 10,5731 janvier 1829, qui sera l'instant du prochain retour de la comète en ce point.

On aura pour cette époque

$$n^{\text{IV}} = 1070'',0690 - 0'',5120 = 1069'',5570.$$

Quant aux autres élémens de l'orbite, le tableau suivant contient les altérations qu'ils éprouvent dans les quatre périodes que nous venons de parcourir.

Altérations de l'excentricité, du périhélie, du nœud et de l'inclinaison de l'orbite de 1805 à 1829.

Périodes.	Altération de l'excentricité.	Altération de la longitud. du périhélie.	Altération de la longitud. du nœud.	Altération de l'inclinais. de l'orbite.
1805 à 1819	+ 0.0019950	+ 5′ 10″	— 1′ 54″	+ 2′ 49″
1819 à 1822	— 0.0039038	+ 9.41	— 10.50	— 16. 8
1822 à 1825	+ 0.0004305	+ 0.15	— 0.10	+ 1. 4
1825 à 1829	— 0.0002920	+ 1.19	— 0.39	— 0.55

Les altérations des longitudes du périhélie et du nœud sont comptées d'une équinoxe fixe ; si on leur ajoute 11′ 0″ pour la première période et 2′ 46″ pour les autres, on aura leurs valeurs par rapport à l'équinoxe mobile.

En partant des élémens calculés d'après les observations de Paramatta, on a formé, à l'aide des résultats qui précèdent, le tableau suivant qui présente les élémens elliptiques qui répondent aux cinq passages au périhélie, observés dans l'intervalle de 1805 à 1829.

Passage au Périhélie.	Moyen mouvem. diurne.	Demi grand axe.	Excentric.	Lieu du périhélie.	Lieu du nœud.	Inclinais.
1805, nov. 22,006	1073″4877	2,218912	0,8464567	156°43′ 0″	334°18′ 29″	13°35′ 44″
1819, janv. 27,752	1076,7791	2,214388	0,8484517	156.59. 1	334.27.36	13.38.33
1822, mai. 24,494	1069,4158	2,224542	0,8445479	157.11.29	334.19.32	13.22.25
1825, sept. 16,784	1070,0690	2,223636	0,8449784	157.14.30	334.22. 8	13.23.29
1829, janv. 10,573	1069,5570	2,224346	0,8446862	157.18.35	334.24.15	13.22.34

Si l'on compare les élémens relatifs aux périhélies de 1805 et 1819 à ceux qui résultent des observations faites à ces deux époques, on voit qu'ils s'accordent d'une manière satisfaisante, les plus grands écarts étant d'une minute sur la longitude du périhélie, de cinq sur celle du nœud, et de deux sur l'inclinaison de l'orbite. Mais on pourrait juger encore mieux leur

précision en calculant, d'après ces élémens, quelques lieux de la comète à diverses époques, que l'on comparerait ensuite à des lieux qui auraient été directement observés.

Comète périodique de 6^{ans},7.

51. Les perturbations de cette comète, depuis sa dernière apparition en 1826, et l'époque de son prochain retour au périhélie, ont été déterminées par M. Damoiseau; nous nous contenterons de rapporter ici le résultat de ses calculs.

M. Gambart a fixé les élémens elliptiques de l'orbite pour les époques de 1806 et de 1826, en supposant la révolution moyenne de la comète dans cet intervalle de 2460^j, ainsi qu'il suit:

	1806.		1826.
Pass. au périh., janv.	2,4807	mars.	18,9688
Excentricité........	0.7470093		0.7457842
Lieu du périhélie ...	109° 51′ 32″		109° 32′ 23″
Long. du nœud asc...	251.26. 9		251.15.15
Inclinaison.........	13.33.15		13.38.45
Demi grand axe.....	3.56705.		

En partant de ces élémens, M. Damoiseau a trouvé, pour les altérations du moyen mouvement et de l'anomalie moyenne, pendant la période de 1806 à 1826,

	Altér. du moy. mouv.	Altér. de l'anom. moy.
♃	+ 1″4497	+ 0° 45′ 39″ 94
♅	+ 0, 1811	+ 0.22.10, 72
♄	— 0, 0317	— 0. 2.45, 95
	+ 1″5991	+ 1° 5′ 4″ 71.

Si l'on désigne donc par n et n' les moyens mouvemens diurnes de la comète aux périhélies de 1806 et de 1826, l'intervalle entre les deux passages étant de 7380^j,4881, on aura

$$n = \frac{360^\circ \times 3 - 1^\circ 5' 4'',71}{7380,4881} = 8'46'',2652,$$

$$n' = 8'46'',2652 + 1'',5991 = 8'47'',8643.$$

En calculant ensuite les altérations des mêmes élémens pour la période commencée en 1826, le même astronome a trouvé

	Altér. du moy. mouv.	Anomalie moy.
♃	+ 5″5745	+ 1° 28′ 50″ 94
♅	+ 0, 0332	— 0. 0.34, 69
♄	— 0, 0311	— 0. 3.14, 83
	+ 5″5766	+ 1° 25′ 1″ 42.

Soit T l'intervalle de temps inconnu qui s'écoulera entre le passage de la comète à son périhélie en 1806 et son prochain retour au même point de son orbite, et soit n'' le moyen mouvement diurne à cette époque, on aura

$$T = \frac{360^\circ - 1^\circ 25' 1'',42}{8'47'',8643} = 2455^j,1762 - 9^j,6642 = 2445^j,5120,$$

$$n'' = 8'47'',8643 + 5'',5766 = 8'53'',4409.$$

L'effet des forces perturbatrices diminuera donc de

pendant l'influence de cette grande loi de la nature n'en est pas moins admirable dans la question qui va nous occuper; elle lie entre eux des phénomènes qui sans elle paraîtraient n'avoir aucune analogie. Ainsi, comme nous l'avons dit, les mouvemens des axes de rotation des planètes ne sont qu'une conséquence de l'ellipticité de leurs figures, et l'on verra que les rapports qui peuvent exister entre les durées de leurs mouvemens de révolution et de leurs mouvemens de rotation les modifient encore d'une manière particulière. La pesanteur universelle, appliquée à cette nouvelle classe de phénomènes, non-seulement explique d'une manière très simple plusieurs points importans du système du monde, que l'observation avait de tout temps révélés aux hommes, mais dont ils avaient jusque là vainement cherché les causes; elle donne encore le moyen de calculer les lois de ces phénomènes, avantage précieux, parce que, comme ils procèdent avec une extrême lenteur, on ne pourrait les déterminer directement que par des observations séparées par des milliers de siècles. Enfin, la théorie du mouvement des corps célestes autour de leur centre de gravité a pour nous cet intérêt spécial qui s'attache à tout ce qui nous touche de près; elle fournit plusieurs données importantes sur la figure et la nature du globe terrestre, et des renseignemens précieux sur sa stabilité.

L'analyse que nous allons présenter est générale et peut s'appliquer à tous les corps du système solaire; elle n'est que le développement des considérations exposées dans le chapitre III du livre II, et par les-

quelles nous avons ramené à un seul et même principe la détermination de toutes les inégalités planétaires. Malheureusement, dans la question qui nous occupe, les observations sont bien en arrière de la théorie. On conçoit en effet, combien elles demandent de précision et combien, à la distance où nous sommes des corps célestes, il est difficile de saisir des phénomènes qui se passent pour ainsi dire à leur surface; aussi ce n'est encore que par rapport à la Terre et à la Lune que l'on est parvenu à rendre les observations assez certaines pour les comparer à la théorie. Nous examinerons en particulier les phénomènes relatifs aux mouvemens de rotation de ces deux planètes, et ils serviront d'application aux formules générales qui seront développées dans le chapitre suivant.

CHAPITRE PREMIER.

Intégration des équations différentielles qui déterminent les mouvemens des corps célestes autour de leurs centres de gravité.

1. Reprenons les trois équations (B) que nous avons trouvées n° 5, livre II, pour déterminer le mouvement des corps célestes autour de leurs centres de gravité :

$$\left.\begin{aligned} Adp + (C - B).qr.dt &= \left(y.\frac{dV}{dz} - z.\frac{dV}{dy}\right).dt, \\ Bdq + (A - C).rp.dt &= \left(z.\frac{dV}{dx} - x.\frac{dV}{dz}\right).dt, \\ Cdr + (B - A).pq.dt &= \left(x.\frac{dV}{dy} - y.\frac{dV}{dx}\right).dt. \end{aligned}\right\} \text{(A)}$$

Dans ces équations, A, B, C représentent les trois momens d'inertie principaux du corps, respectivement relatifs aux axes des x, des y et des z; en sorte qu'on a

$$A = S.(y^2+z^2).dm, \quad B = S.(x^2+z^2).dm, \quad C = S.(x^2+y^2).dm.$$

Les trois quantités p, q, r déterminent à chaque instant la position de l'axe instantané de rotation par rapport aux axes principaux, et la vitesse de rotation

autour de cet axe; en sorte que si l'on désigne par α, $\mathcal{C}$, γ, les trois angles que forme respectivement l'axe instantané avec les axes des x, des y et des z, on a

$$\cos\alpha = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}},\quad \cos\mathcal{C} = \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}},\quad \cos\gamma = \frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

et $\sqrt{p^2+q^2+r^2}$ exprime la vitesse de rotation autour du même axe.

Enfin V représente la somme des masses des corps agissans du système, divisées respectivement par leur distance à l'élément dm du corps attiré, et multipliées par la masse de cet élément; c'est-à-dire que si l'on ne considère que l'action d'un seul astre L, qu'on nomme x', y', z' les coordonnées de cet astre, et x, y, z celles de l'élément dm, rapportées aux trois axes principaux qui se croisent au centre de gravité du sphéroïde, on aura

$$V = S \, . \, \frac{L dm}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}},$$

le signe intégral S se rapportant à l'élément dm et aux quantités qui varient avec lui, et devant être étendu à la masse entière du corps attiré.

Les trois équations (A) suffisent pour déterminer à chaque instant les mouvemens du corps m par rapport aux trois axes principaux qui se croisent à son centre de gravité; mais pour connaître sa position absolue dans l'espace, il faut déterminer encore la position de ces axes mobiles par rapport à trois axes fixes, ce qui exige l'intégration des trois nouvelles

équations suivantes

$$\left.\begin{aligned} d\varphi - \cos\theta \, . \, d\psi &= r dt, \\ d\theta &= \sin\varphi \, . \, q dt - \cos\varphi \, . \, p dt, \\ \sin\theta \, . \, d\psi &= \cos\varphi \, . \, q dt + \sin\varphi \, . \, p dt. \end{aligned}\right\} (a)$$

Dans ces équations, θ représente l'inclinaison du plan des xy sur un plan fixe, ψ est l'angle que forme l'intersection de ces deux plans avec une ligne fixe menée dans le second, et φ l'angle compris entre cette intersection et l'axe des x. Ainsi, les angles θ et φ déterminent la position du plan des xy, que, pour abréger, nous appellerons désormais l'équateur du corps, et l'angle φ fait connaître la position de l'axe des x dans ce plan.

2. On peut faire subir aux seconds membres des équations (A) plusieurs transformations qu'il est bon de connaître, parce qu'elles nous seront utiles par la suite.

Nous remarquerons d'abord que, d'après la valeur de V, on a

$$\begin{aligned} y \, . \, \frac{dV}{dz} - z \, . \, \frac{dV}{dy} &= z' \, . \, \frac{dV}{dy'} - y' \, . \, \frac{dV}{dz'}, \\ z \, . \, \frac{dV}{dx} - x \, . \, \frac{dV}{dz} &= x' \, . \, \frac{dV}{dz'} - z' \, . \, \frac{dV}{dx'}, \\ x \, . \, \frac{dV}{dy} - y \, . \, \frac{dV}{dx} &= y' \, . \, \frac{dV}{dx'} - x' \, . \, \frac{dV}{dy'}. \end{aligned}$$

Les équations (A) deviennent par conséquent

$$\left.\begin{aligned} A dp + (C - B) \, . \, qr \, . \, dt &= \left(z' \, . \, \frac{dV}{dy'} - y' \, . \, \frac{dV}{dz'}\right) . \, dt, \\ B dq + (A - C) \, . \, rp \, . \, dt &= \left(x' \, . \, \frac{dV}{dz'} - z' \, . \, \frac{dV}{dx'}\right) . \, dt, \\ C dr + (B - A) \, . \, pq \, . \, dt &= \left(y' \, . \, \frac{dV}{dx'} - x' \, . \, \frac{dV}{dy'}\right) . \, dt. \end{aligned}\right\} (B)$$

Les trois quantités p, q, r sont données en fonction des angles φ, ψ, θ et de leurs différentielles au moyen des équations (a). Pour introduire les mêmes variables dans les seconds membres des équations précédentes, transformons les coordonnées x', y', z', qui se rapportent aux axes mobiles des x, des y et des z en d'autres coordonnées x, y, z, relatives à des axes fixes; prenons pour plan fixe des x et des y le plan de l'écliptique à une époque déterminée, et pour axe des z une ligne perpendiculaire à ce plan. On aura d'après les formules du n° 31, livre I[er],

$$x' = \mathrm{x}.(\cos\theta.\sin\psi.\sin\varphi + \cos\psi.\cos\varphi) + \mathrm{y}.(\cos\theta.\cos\psi.\sin\varphi - \sin\psi.\cos\varphi) - \mathrm{z}.\sin\theta.\sin\varphi,$$

$$y' = \mathrm{x}.(\cos\theta.\sin\psi.\cos\varphi - \cos\psi.\sin\varphi) + \mathrm{y}.(\cos\theta.\cos\psi.\cos\varphi + \sin\psi.\sin\varphi) - \mathrm{z}.\sin\theta.\cos\varphi,$$

$$z' = \mathrm{x}.\sin\theta.\sin\psi + \mathrm{y}.\sin\theta.\cos\psi + \mathrm{z}.\cos\theta,$$

Si l'on substitue dans l'expression de V, à la place des coordonnées x', y', z', leurs valeurs, elle deviendra fonction des angles φ, ψ, θ et des variables x, y, z, x, y, z, et comme ces dernières sont indépendantes de ces angles, en prenant la différentielle de V par rapport à φ, ψ, θ, on aura

$$\frac{dV}{d\varphi}.d\varphi + \frac{dV}{d\psi}.d\psi + \frac{dV}{d\theta}.d\theta = \frac{dV}{dx'}.d'x' + \frac{dV}{dy'}.d'y' + \frac{dV}{dz'}.d'z',$$

en désignant par $d'x'$, $d'y'$ et $d'z'$ les différentielles des coordonnées x', y', z' prises en ne faisant varier que les trois angles φ, ψ et θ. Si dans cette équation on remplace $d'x'$, $d'y'$, $d'z'$ par leurs valeurs ainsi déterminées, et qu'ensuite on compare de part et

d'autre, les coefficiens de $d\varphi$, de $d\psi$ et de $d\theta$, on trouvera

$$\frac{dV}{d\varphi} = y' \cdot \frac{dV}{dx'} - x' \cdot \frac{dV}{dy'},$$
$$\frac{dV}{d\theta} = \sin\varphi \cdot \left(x' \cdot \frac{dV}{dz'} - z' \cdot \frac{dV}{dx'}\right) + \cos\varphi \cdot \left(y' \cdot \frac{dV}{dz'} - z' \cdot \frac{dV}{dy'}\right),$$
$$\frac{dV}{d\psi} = \cos\theta \cdot \left(x' \cdot \frac{dV}{dy'} - y' \cdot \frac{dV}{dx'}\right) + \sin\theta . \cos\varphi . \left(x' \cdot \frac{dV}{dz'} - z' \cdot \frac{dV}{dx'}\right)$$
$$+ \sin\theta . \sin\varphi . \left(z' \cdot \frac{dV}{dy'} - y' \cdot \frac{dV}{dz'}\right);$$

d'où il est aisé de conclure

$$y' \frac{dV}{dx'} - x' \frac{dV}{dy'} = \frac{dV}{d\varphi},$$
$$x' \frac{dV}{dz'} - z' \frac{dV}{dx'} = \frac{\cos\varphi}{\sin\theta} \cdot \left(\frac{dV}{d\psi} + \cos\theta \cdot \frac{dV}{d\varphi}\right) + \frac{dV}{d\theta} \cdot \sin\varphi,$$
$$z' \frac{dV}{dy'} - y' \frac{dV}{dz'} = \frac{\sin\varphi}{\sin\theta} \cdot \left(\frac{dV}{d\psi} + \cos\theta \cdot \frac{dV}{d\varphi}\right) - \frac{dV}{d\theta} \cdot \cos\varphi.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans les équations (B), elles deviendront

$$\left.\begin{aligned} &A \frac{dp}{dt} + (C - B) . qr = \frac{\sin\varphi}{\sin\theta} \cdot \left(\frac{dV}{d\psi} + \cos\theta \cdot \frac{dV}{d\varphi}\right) - \frac{dV}{d\theta} . \cos\varphi, \\ &B \frac{dq}{dt} + (A - C) . pr = \frac{\cos\varphi}{\sin\theta} . \left(\frac{dV}{d\psi} + \cos\theta . \frac{dV}{d\varphi}\right) + \frac{dV}{d\theta} . \sin\varphi, \\ &C \frac{dr}{dt} + (B - A) . pq = \frac{dV}{d\varphi}. \end{aligned}\right\} (C)$$

3. Il est inutile d'observer que ces équations conserveraient la même forme, quel que soit le nombre des corps agissans du système, et quand bien même on voudrait avoir égard à la figure de quelqu'un de ces corps, n° 6, livre II. Les nouveaux astres que l'on

considérera ne feront qu'ajouter à la fonction V des termes semblables à ceux qu'a introduits l'action de l'astre L, et il suffira dans le second cas de remplacer leurs masses L, L', L'', etc., par les élémens infiniment petits de ces masses. La fonction V sera donnée alors par deux intégrations indépendantes l'une de l'autre, la première relative au sphéroïde attiré, la seconde aux astres qui agissent sur lui. En faisant subir aux coordonnées des astres L', L'', etc., la transformation précédente, on introduira dans l'expression de V les trois angles φ, ψ, θ, et en prenant les différences partielles $\frac{dV}{d\varphi}$, $\frac{dV}{d\psi}$, $\frac{dV}{d\theta}$ relatives à ces angles, on formera les seconds membres des équations (C).

On doit donc regarder généralement V comme une fonction donnée des angles φ, ψ, θ, qui renferme en outre le temps à raison du mouvement des astres qui agissent sur le sphéroïde; et l'on peut par conséquent supposer cette fonction développée en série de sinus et de cosinus d'angles multiples de φ; on conçoit en effet que si l'on fait

$$V' = \frac{1}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}},$$

et que l'on substitue pour x', y', z' leurs valeurs n° 2, on pourra développer V' en une série semblable; en multipliant ensuite par dm chacun des termes de ce développement et en l'intégrant, on aura...... $V = S.V'dm$; et comme le signe S ne se rapporte qu'à la molécule dm, et que les variables φ, ψ, θ sont les mêmes pour toutes les molécules du corps,

cette intégration n'altérera pas la forme de la série.

Nous donnerons dans la suite l'expression du développement de V ainsi effectué; il suffira pour le moment d'en concevoir la possibilité. On verra alors que les différences partielles de V sont de l'ordre $\frac{L}{r'^3}$, L étant la masse de l'astre attirant et r' sa distance à la molécule dm; il est facile de juger par là l'influence de l'action des forces perturbatrices.

On peut observer encore que les différences partielles de V sont de l'ordre de l'aplatissement du sphéroïde que l'on considère. Il est évident en effet que, si le corps était sphérique, la fonction V se réduirait à une quantité indépendante des angles φ, ψ, θ; et comme la figure des corps célestes est peu différente de la sphère, cette circonstance contribue encore à rendre très petits les seconds membres des équations (C). Il suit de là que l'on doit regarder généralement comme très petites les forces qui troublent le mouvement de rotation des corps célestes.

4. Si l'on multiplie les équations (C), la première par p, la seconde par q, la troisième par r, qu'on les ajoute ensuite, et que dans le second membre des équations résultantes on substitue pour p, q et r, leurs valeurs tirées des équations (a), on trouvera

$$Apdp + Bqdq + Crdr = \frac{dV}{d\varphi} \cdot d\varphi + \frac{dV}{d\psi} \cdot d\psi + \frac{dV}{d\theta} \cdot d\theta. \qquad (b)$$

Le second membre de cette équation serait une différentielle complète, si les astres qui agissent sur le sphéroïde étaient fixes; mais comme ils changent de

position, la fonction V contient, outre les variables φ, ψ, θ, les variables x, y, z, qui dépendent du mouvement de ces astres; soit donc

$$\frac{dV}{d\varphi}.d\varphi+\frac{dV}{d\psi}.d\psi+\frac{dV}{d\theta}.d\theta=d'V,$$

la caractéristique d' se rapportant uniquement aux variables φ, ψ, θ, relatives aux déplacemens des trois axes principaux du sphéroïde. En intégrant l'équation (b), on aura

$$Ap^2+Bq^2+Cr^2=\text{const.}+2.\int d'V. \qquad (c)$$

Cette équation renferme le principe des forces vives : nous avons fait voir en effet, n° 33, livre Ier, que la fonction $Ap^2+Bq^2+Cr^2$ exprimait la force vive du sphéroïde dont les trois momens d'inertie principaux sont A, B, C, et dont $\sqrt{p^2+q^2+r^2}$ est la vitesse de rotation autour de l'axe instantané.

Si l'on suppose donc

$$T=\frac{Ap^2+Bq^2+Cr^2}{2},$$

l'équation (c) devient

$$T-\int.d'V=\text{constante}.$$

En appliquant à cette équation l'analyse du n° 13, livre II, on en tirera trois équations analogues aux équations (c) du même numéro. En effet, p, q, r étant donnés en fonction des variables φ, ψ, θ et de leurs différentielles par les équations (a), on peut regarder T

comme une fonction de ces variables, et si pour abréger on fait $\frac{d\varphi}{dt}=\varphi'$, $\frac{d\psi}{dt}=\psi'$, $\frac{d\theta}{dt}=\theta'$, en différenciant on aura

$$\frac{dT}{d\varphi'}.d\varphi'+\frac{dT}{d\psi'}.d\psi'+\frac{dT}{d\theta'}.d\theta'+\frac{dT}{d\varphi}.d\varphi+\frac{dT}{d\psi}.d\psi+\frac{dT}{d\theta}.d\theta$$
$$=\frac{dT}{dp}.dp+\frac{dT}{dq}.dq+\frac{dT}{dr}.dr.$$

Les équations (a) donnent

$$\left.\begin{array}{l} p=\psi'.\sin\theta.\sin\varphi-\theta'.\cos\varphi, \\ q=\psi'.\sin\theta.\cos\varphi+\theta'.\sin\varphi, \\ r=\varphi'-\psi'.\cos\theta. \end{array}\right\}(\alpha)$$

Si après avoir différencié ces valeurs, on les substitue dans le second membre de l'équation précédente, et qu'on compare ensuite les coefficiens de $d\varphi'$, $d\psi'$, etc., cette équation donnera

$$\frac{dT}{d\varphi'}=\frac{dT}{dr};\ \frac{dT}{d\psi'}=\sin\theta.\sin\varphi.\frac{dT}{dp}+\sin\theta.\cos\varphi.\frac{dT}{dq},$$
$$\frac{dT}{d\theta'}=\sin\varphi.\frac{dT}{dq}-\cos\varphi.\frac{dT}{dp};\ \frac{dT}{d\varphi}=q.\frac{dT}{dp}-p.\frac{dT}{dq},$$
$$\frac{dT}{d\psi}=0;\ \frac{dT}{d\theta}=\left[\cos\theta.\left(\sin\varphi.\frac{dT}{dp}+\cos\varphi.\frac{dT}{dq}\right)+\sin\theta.\frac{dT}{dr}\right].\psi'.$$

La valeur précédente de T donne d'ailleurs

$$\frac{dT}{dp}=Ap,\ \frac{dT}{dq}=Bq,\ \frac{dT}{dr}=Cr;$$

les équations (c) du n° 13, livre II, deviennent donc ainsi

$$C.\frac{dr}{dt}+(B-A).pq=\frac{dV}{d\varphi},$$

$$\frac{d.[\sin\theta.(Ap\sin\varphi+Bq\cos\varphi)-\cos\theta.Cr]}{dt}=\frac{dV}{d\psi},$$

$$\frac{d.(Bq\sin\varphi-Ap\cos\varphi)}{dt}-[\cos\theta.(Ap\sin\varphi+Bq\cos\varphi)+\sin\theta.Cr].\psi'=\frac{dV}{d\theta}.$$

Ces équations sont identiques avec les équations (f) du n° 15, livre II, lorsqu'on suppose dans celles-ci $V=0$, $\Omega=V$, et qu'on y remplace les différences partielles de la fonction T par leurs valeurs; on peut par conséquent intégrer ces équations par le même procédé, et comme elles ne sont qu'une transformation des équations différentielles (C), il est clair que leurs intégrales conviendront également à ces dernières, et réciproquement. Nous supposerons donc, conformément aux principes de la méthode générale d'intégration développée dans le chap. III du livre II, les équations précédentes, ou, ce qui revient au même, les équations (C) intégrées dans le cas où leurs seconds membres sont nuls, et nous avons vu n° 35, livre I[er], que cette intégration est toujours possible; nous ferons varier ensuite les constantes introduites par l'intégration, de manière à satisfaire encore aux mêmes équations dans le cas où l'on considère l'action des forces perturbatrices.

Il est bon de remarquer ici que nous avons supposé dans le chapitre cité que Ω, qui représente l'intégrale de la somme des forces perturbatrices multipliées respectivement par l'élément de leur direction, est en effet une fonction toujours intégrable; mais cette condition, qui n'est remplie ni dans la question du

mouvement de translation, ni dans celle du mouvement de rotation des corps célestes, n'est nullement nécessaire et ne doit limiter en rien la généralité de cette analyse. Il suffit en effet, pour son exactitude, que les différences partielles de la fonction Ω, qui représentent les forces perturbatrices, soient une fonction finie des variables φ, ψ, θ, puisque ces différences partielles entrent seules dans les formules des variations des constantes arbitraires.

5. Reprenons les diverses intégrales auxquelles nous sommes parvenus dans le n° 35, du Ier livre, savoir

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{A}ap + \mathrm{B}bq + \mathrm{C}cr &= \beta, \\
\mathrm{A}a'p + \mathrm{B}b'q + \mathrm{C}c'r &= \beta', \\
\mathrm{A}a''p + \mathrm{B}b''q + \mathrm{C}c''r &= \beta'', \\
\mathrm{A}p^2 + \mathrm{B}q^2 + \mathrm{C}r^2 &= h, \\
\mathrm{A}^2p^2 + \mathrm{B}^2q^2 + \mathrm{C}^2r^2 &= k^2; \\
t + l = \int \frac{\sqrt{\mathrm{AB}}.\mathrm{C}dr}{\sqrt{\{k^2 - \mathrm{B}h + (\mathrm{B}-\mathrm{C}).\mathrm{C}r^2\}\{-k^2 + \mathrm{A}h + (\mathrm{C}-\mathrm{A}).\mathrm{C}r^2\}}}&, \\
\psi, + g = \int \frac{k.(\mathrm{C}r^2 - h).\sqrt{\mathrm{AB}}.\mathrm{C}dr}{(k^2 - \mathrm{C}^2r^2).\sqrt{\{k^2 - \mathrm{B}h + (\mathrm{B}-\mathrm{C}).\mathrm{C}r^2\}\{-k^2 + \mathrm{A}h + (\mathrm{C}-\mathrm{A}).\mathrm{C}r^2\}}}&.
\end{aligned}\right\} (d)$$

Ces sept équations n'équivalent qu'à six intégrales distinctes, et les quatre constantes β, β', β'', k sont liées entre elles par l'équation de condition

$$\beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 = k^2. \qquad (e)$$

Les trois arbitraires β, β', β'' déterminent la position du plan principal de projection, en sorte que si l'on appelle γ son inclinaison sur un plan fixe quel-

conque, et α la longitude de son nœud comptée d'une origine arbitraire, on aura

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{\beta}{\beta'}, \quad \text{tang}\,\gamma = \frac{\sqrt{\beta^2 + \beta'^2}}{\beta''}. \qquad (f)$$

La constante h est celle qui sert à compléter l'intégrale des forces vives; la constante l dépend de la position du corps à un instant déterminé; enfin, relativement à la constante g, nous observerons que $\psi_{,}$ représente la longitude de l'équateur du corps, sur le plan principal de projection, comptée à partir de l'intersection de ce dernier plan avec le plan fixe, nº 35, livre Iᵉʳ. On peut donc, pour fixer les idées, supposer que $-g$ est la valeur de cette longitude à l'origine du mouvement, puisqu'il suffit pour cela de le faire commencer à l'instant où l'intégrale de la valeur de $\psi_{,}$ s'évanouit.

Les intégrales (d) suffisent pour déterminer à chaque instant la position du corps par rapport au plan invariable, en sorte que si l'on désigne par $\varphi_{,}$ et $\theta_{,}$, relativement à ce plan, les angles que nous avons nommés φ et θ par rapport au plan fixe, on connaîtra par les formules précédentes les valeurs des angles $\varphi_{,}$, $\psi_{,}$, $\theta_{,}$, γ et α, et l'on déterminera celles des trois angles φ, ψ, θ, par les formules du nº 35, livre Iᵉʳ.

Cela posé, concevons que l'on veuille étendre les intégrales précédentes aux équations (C), où l'on considère l'action des forces perturbatrices. Les trois arbitraires β, β', β'' ne seront plus constantes; le plan principal de projection que nous avions considéré

comme invariable n° 35, livre cité, cessera de l'être, mais il conservera toujours la propriété d'être à chaque instant le plan par rapport auquel la somme des projections des aires décrites par les rayons vecteurs des élémens, du sphéroïde, multipliées par les masses de ces élémens, est un maximum; les quatre constantes h, k, l, g, deviendront également variables, et l'on déterminera les variations de ces différentes quantités par la formule générale (D), n° 18, livre II.

Pour cela, il est nécessaire d'exprimer préalablement ces constantes en fonction des variables indépendantes du problème et des quantités s, u, v, qui sont, comme on sait, des fonctions de ces variables et de leurs différences premières. Dans la question qui nous occupe, comme dans celle du mouvement de translation, les variables indépendantes sont au nombre de trois : nous avons pris les trois angles φ, ψ, θ, pour ces variables; nous avons désigné pour abréger par φ', ψ', θ' les différentielles φ, ψ, θ, divisées par dt, et par T la moitié de la force vive du sphéroïde; on aura par conséquent, n° 13, livre II,

$$s = \frac{dT}{d\varphi'}, \quad u = \frac{dT}{d\psi'}, \quad v = \frac{dT}{d\theta'}.$$

Nous avons trouvé n° 4 pour l'expression de T,

$$T = \frac{Ap^2 + Bq^2 + Cr^2}{2};$$

on aura donc en vertu des valeurs de $\frac{dT}{d\varphi'}$, $\frac{dT}{d\psi'}$, $\frac{dT}{d\theta'}$, données dans le même numéro,

$s = Cr,$
$u = (Ap.\sin\varphi + Bq.\cos\varphi).\sin\theta - Cr.\cos\theta,$
$v = -Ap.\cos\varphi + Bq.\sin\varphi,$

où l'on tire

$$\left.\begin{aligned} Ap &= (u + s\cos\theta).\frac{\sin\varphi}{\sin\theta} - v\cos\varphi, \\ Bq &= (u + s\cos\theta).\frac{\cos\varphi}{\sin\theta} + v\sin\varphi, \\ Cr &= s. \end{aligned}\right\} \quad (g)$$

dans les expressions des constantes β, β', β'', on
ıbstitue ces valeurs, et qu'on remplace en même
mps les quantités a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'',
ır leurs valeurs données n° 28, liv. Ier, on trouvera

$$\left.\begin{aligned} \beta &= (s + u\cos\theta).\frac{\sin\psi}{\sin\theta} - v\cos\psi, \\ \beta' &= (s + u\cos\theta).\frac{\cos\psi}{\sin\theta} + v\sin\psi, \\ \beta'' &= -u. \end{aligned}\right\} \quad (h)$$

n mettant pour β, β', β'', leurs valeurs dans les
juations (f), on exprimera les constantes α et γ en
ınction des mêmes variables. On pourrait exprimer
e même les constantes h et k en fonction des six
ariables φ, ψ, θ, s, u, v, mais il sera plus simple
e les regarder comme déterminées par les équa-
ons (d) et (e), en y considérant les quantités p,
, r, β, β', β'' comme des fonctions données de ces
ariables. Enfin, on substituera sous le signe intégral
à la place de Cr dans les deux dernières équations (d),
t en supposant les intégrations effectuées, on
ourra regarder les six constantes h, k, α, γ, l, g,

comme exprimées en fonction des six variables φ, ψ, θ, s, u, v. Il ne restera donc plus qu'à substituer leurs différentielles partielles prises par rapport à ces quantités dans la formule générale

$$(a,b)=\frac{da}{ds}\cdot\frac{db}{d\varphi}-\frac{da}{d\varphi}\cdot\frac{db}{ds}+\frac{da}{du}\cdot\frac{db}{d\psi}-\frac{du}{d\psi}\cdot\frac{db}{du}+\frac{du}{dv}\cdot\frac{db}{d\theta}-\frac{da}{d\theta}\cdot\frac{db}{dv},$$

pour avoir les valeurs des quinze symboles (k,α), (k,γ), etc.

6. Pour suivre ici la même marche que dans la recherche des variations des élémens elliptiques, commençons par déterminer les valeurs des quantités (k,α), (k,γ), (α,γ), (h,k), (h,α), (h,γ), où n'entrent point les lettres l et g; et afin de simplifier ce calcul formons d'abord les trois combinaisons (β,β'), (β,β''), (β',β''); on trouvera sans peine

$$(\beta,\beta')=-\beta'',\quad (\beta,\beta'')=\beta',\quad (\beta',\beta'')=-\beta.$$

Si l'on regarde α et γ comme des fonctions de β, β', β'', données par les équations

$$\tang\alpha=\frac{\beta}{\beta'},\quad \tang\gamma=\frac{\sqrt{\beta^2+\beta'^2}}{\beta''},$$

on aura

$$(k,\alpha)=(k,\beta).\frac{d\alpha}{d\beta}+(k,\beta').\frac{d\alpha}{d\beta'},$$

$$(k,\gamma)=(k,\beta).\frac{d\gamma}{d\beta}+(k,\beta').\frac{d\gamma}{d\beta'}+(k,\beta'').\frac{d\gamma}{d\beta''}.$$

D'ailleurs k étant une fonction de β, β', β'', donnée par l'équation $k^2=\beta^2+\beta'^2+\beta''^2$, on a

$$(k',\beta)=(\beta',\beta).\frac{dk}{d\beta'}+(\beta'',\beta).\frac{dk}{d\beta''}=(\beta',\beta).\frac{\beta'}{k}+(\beta'',\beta).\frac{\beta''}{k},$$

et par conséquent $(k,\beta)=0$; on aurait de même $(k,\beta')=0$, $(k,\beta'')=0$, d'où l'on conclura

$$(k,\alpha)=0,\quad (k,\gamma)=0.$$

La valeur précédente de tang γ donne

$$\cos\gamma=\frac{\beta''}{k};$$

en observant donc que (α,k) est nul par ce qui précède, on aura simplement

$$(\alpha,\gamma)=(\alpha,\beta'').\frac{d\gamma}{d\beta''}=-(\alpha,\beta'').\frac{1}{k\sin\gamma}.$$

Or,

$$(\alpha,\beta'')=(\beta',\beta'').\frac{d\alpha}{d\beta}+(\beta',\beta'').\frac{d\alpha}{d\beta'}=\cos^2\alpha.\left(\frac{\beta^2+\beta'^2}{\beta'^2}\right)=1;$$

donc,

$$(\alpha,\gamma)=-\frac{1}{k\sin\gamma}.$$

Si l'on combine la constante h avec les trois constantes β, β', β'', on trouvera

$$(h,\beta)=0,\quad (h,\beta')=0,\quad (h,\beta'')=0.$$

En effet, la constante β'', par exemple, ne contenant que la variable u, la formule (C) n° 18, livre II, donnera

$$(h,\beta)=-\frac{dh}{d\psi}\cdot\frac{d\beta''}{du}.$$

Or, la constante h est fonction de p, q, r, et les valeurs (α) de ces quantités ne contiennent pas la variable ψ; on a donc $\frac{dh}{d\psi}=0$, et par conséquent $(h,\beta)=0$. On peut en conclure par analogie que (h,β') et (h,β'') sont nuls pareillement; il est facile d'ailleurs de le vérifier en calculant directement leurs valeurs.

Il suit de là que si l'on regarde k, α, γ comme fonctions de β, β', β'', on aura

$$(h,k)=0,\quad (h,\alpha)=0,\quad (h,\gamma)=0.$$

Formons maintenant les quatre combinaisons (l,h), (l,k), (l,α), (l,γ) qui renferment la constante l sans contenir la constante g.

La sixième des intégrales (d), en mettant s à la place de Cr sous le signe intégral, devient

$$t+l=\int\frac{\sqrt{AB}.Cds}{\sqrt{[Ck^2-BCh+(B-C).s^2].[-Ck^2+ACh+(C-A).s^2]}}.\quad (d')$$

Si l'on suppose l'intégration effectuée, cette équation donne

$$l=-t+\text{fonct.}(h,k,s).$$

On aura ainsi $\frac{dl}{ds}=\frac{dt}{ds}$, et pour avoir les différences partielles $\frac{dl}{dh}$, $\frac{ds}{dk}$, il suffira de différencier sous le signe intégral le second membre de l'équation (d') par rapport aux constantes h et k.

La valeur de l ne contenant que la variable s, en

a combinant avec une constante quelconque b, et en faisant d'abord abstraction des constantes h et k qu'elle renferme, on aura

$$(l, b) = \frac{dt}{ds} \cdot \frac{db}{d\varphi}.$$

Pour avoir égard aux constantes h et k, il faudrait ajouter au second membre les deux termes

$$(h, b) \cdot \frac{dl}{dh} + (k, b) \cdot \frac{dl}{dk}.$$

Mais on peut s'en dispenser, parce que b devant représenter l'une des quatre constantes h, k, α, γ, ces deux termes sont toujours nuls.

Substituons d'abord la constante h à la place de b; on a

$$\frac{dh}{d\varphi} = 2Ap \cdot \frac{dp}{d\varphi} + 2Bq \cdot \frac{dq}{d\varphi} + 2Cr \cdot \frac{dr}{d\varphi}.$$

Or, les valeurs de Ap, Bq, Cr donnent

$$A\frac{dp}{d\varphi} = Bq, \quad B\frac{dq}{d\varphi} = -Ap, \quad C\frac{dr}{d\varphi} = 0;$$

on aura par conséquent

$$\frac{dh}{d\varphi} = 2 \cdot (B - A) \cdot pq = -2 \cdot C\frac{dr}{dt},$$

en vertu de la troisième des équations (A).

On aura donc, en observant que $C\frac{dr}{dt} = \frac{ds}{dt}$,

$$(l, h) = -2 \cdot \frac{dt}{ds} \cdot \frac{ds}{dt},$$

et par conséquent

$$(l, h) = -2.$$

Les trois constantes β, β', β'' ne renfermant pas la variable φ, il s'ensuit que si la lettre b représente une fonction quelconque de ces arbitraires, (l, b) sera nul; on aura donc ainsi

$$(l, k) = 0, \quad (l, \alpha) = 0, \quad (l, \gamma) = 0.$$

Passons enfin au calcul des cinq combinaisons (g, h), (g, k), (g, α), (g, γ), (g, l) qui renferme la constante g.

La dernière des équations (d), en substituant s à la place de Cr, devient

$$\psi_{,} + g = \int \frac{k.(s^2 - Ch).\sqrt{AB}.ds}{(k^2 - s^2)\sqrt{[Ck^2 - BCh + (B-C).s^2][-Ck^2 + ACh + (C-A).s^2]}}.$$

Si l'on suppose l'intégration effectuée, cette équation donnera g en fonction de $\psi_{,}$, s, h, k, en sorte qu'on aura

$$g = -\psi_{,} + \text{fonct.}(h, k, s).$$

En la différenciant, on a d'ailleurs

$$\frac{dg}{ds} = \frac{d\psi_{,}}{ds} = \frac{k(s^2 - Ch)}{C.(k^2 - s^2)} \cdot \frac{dt}{ds}.$$

On obtiendrait les différences partielles de g, par rapport à h et à k, en différenciant sous le signe intégral par rapport à ces constantes.

Cela posé, on aura relativement à une constante quelconque b,

$$(g,\ b) = \frac{dg}{ds} \cdot \frac{db}{d\varphi} + (h,\ b)\,\frac{dg}{dh} - (\psi_{,},\, b). \quad (k)$$

Nous omettons le terme $(k,\ b) \cdot \frac{dg}{dk}$, parce que b devant représenter l'une des quatre constantes α, γ, h, l, ce terme est toujours nul.

Pour former la quantité $(\psi_{,},\ b)$, il est nécessaire de connaître la valeur de $\psi_{,}$ en fonction des variables φ, ψ, θ, s, u, v. Or nous avons trouvé n° 35, liv. II,

$$\cos\theta = \cos\gamma \cdot \cos\theta_{,} - \sin\gamma \cdot \sin\theta_{,} \cdot \cos\psi_{,}$$
$$\sin(\psi - \alpha) \cdot \sin\theta = \sin\psi_{,} \cdot \sin\theta_{,}.$$

On a d'ailleurs, n° 35, livre II,

$$k \cdot \cos\gamma = \beta'' = -u, \quad \text{et} \quad k \cdot \cos\theta_{,} = Cr = s;$$

les deux équations précédentes donneront donc

$$\cos\psi_{,} = -\frac{k^2 \cdot \cos\theta + us}{\sqrt{k^2 - u^2}\,\sqrt{k^2 - s^2}}, \quad \sin\psi_{,} = \frac{k \cdot \sin(\psi - \alpha) \cdot \sin\theta}{\sqrt{k^2 - s^2}}.$$

Si l'on différencie la valeur de $\cos\psi_{,}$, par rapport aux variables s, u, θ qu'elle renferme, et qu'on substitue dans le résultat pour $\sin\psi_{,}$, sa valeur, on trouvera

$$\frac{d\psi_{,}}{ds} = \frac{u + s\cos\theta}{(k^2 - s^2) \cdot \sin\gamma \cdot \sin\theta \cdot \sin(\psi - \alpha)},$$
$$\frac{d\psi_{,}}{du} = \frac{s + u\cos\theta}{k^2 \cdot \sin^3\gamma \cdot \sin\theta \cdot \sin(\psi - \alpha)},$$
$$\frac{d\psi_{,}}{d\theta} = -\frac{1}{\sin\gamma \cdot \sin(\psi - \alpha)},$$

par conséquent

$$(\psi_{,}, b) = \frac{u + s.\cos\theta}{(k^2 - s^2).\sin\gamma.\sin\theta.\sin(\psi - \alpha)} \cdot \frac{db}{d\varphi} + \frac{s + u\cos\theta}{k^2.\sin\gamma.\sin\theta.\sin(\psi - \alpha)} \cdot \frac{db}{dt}$$
$$+ \frac{1}{\sin\gamma.\sin(\psi - \alpha)} \cdot \frac{db}{d\nu}.$$

Substituons maintenant successivement dans (g, b) et $(\psi_{,}, b)$ à la place de la lettre b, les quatre constantes h, k, α, γ.

On trouve aisément

$$\frac{dh}{d\varphi} = -2.\frac{ds}{dt}, \quad \frac{dh}{d\psi} = 0, \quad \frac{dh}{d\nu} = -2.(p\cos\varphi - q\sin\varphi);$$

par conséquent

$$(g, h) = \frac{2k.(h - cr^2)}{k^2 - s^2} - (\psi_{,}, h),$$

$$(\psi_{,}, h) = \frac{2}{\sin\gamma.\sin(\psi - \alpha)} \cdot \left[\left(\frac{u + s\cos\theta}{\sin\theta}\right) \cdot \frac{(B - A).pq}{k^2 - s^2} - p\cos\varphi + q\sin\varphi\right].$$

Les équations (g) donnent

$$\frac{u + s\cos\theta}{\sin\theta} = Ap.\sin\varphi + Bq.\cos\varphi,$$

$$k.\sin\gamma.\sin(\psi - \alpha) = \beta'.\sin\psi - \beta.\cos\psi = -Ap\cos\varphi + Bq\sin\varphi.$$

L'expression de $(\psi_{,}, k)$, au moyen de ces valeurs et en observant que $k^2 - s^2 = A^2p + B^2q^2$, se réduit à

$$(\psi_{,}, h) = \frac{2k.(Ap^2 + Bq^2)}{k^2 - s^2} = \frac{2k.(h' - cr^2)}{k^2 - s^2}.$$

Si l'on substitue cette valeur dans l'expression de (g, h), on aura

$$(g, h) = 0.$$

Si l'on combine la constante g avec chacune des trois constantes β, β', β'', et qu'on observe qu'en vertu des équations (h), on a

$$\frac{s + u\cos\theta}{\sin\theta} = \beta\sin\psi + \beta'\cos\psi,$$

on trouvera sans peine

$$(\psi_{,}, \beta) = \frac{\beta}{k\sin^2\gamma}, \quad (\psi_{,}, \beta') = \frac{\beta'}{k\sin^2\gamma}, \quad (\psi_{,}, \beta'') = 0.$$

La constante k étant regardée comme une fonction de β, β', β'' donnée par l'équation

$$k^2 = \beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2,$$

on a

$$(\psi_{,}, k) = (\psi_{,}, \beta).\frac{dk}{d\beta} + (\psi_{,}, \beta').\frac{dk}{d\beta'} = \frac{\beta^2 + \beta'^2}{k^2\sin^2\gamma};$$

par conséquent,

$$(\psi_{,}, k) = 1.$$

La constante γ étant donnée par l'équation

$$\operatorname{tang}\gamma = \frac{\sqrt{\beta^2 + \beta'^2}}{\beta''},$$

on aura

$$(\psi_{,}, \gamma) = (\psi_{,}, \beta).\frac{d\gamma}{d\beta} + (\psi_{,}, \beta').\frac{d\gamma}{d\beta'} = \frac{\cos^2\gamma}{k\sin^2\gamma}.\frac{\sqrt{\beta^2 + \beta'^2}}{\beta''};$$

par conséquent,

$$(\psi_{,}, \gamma) = \frac{\cos\gamma}{k\sin\gamma}.$$

Enfin, la contante α étant déterminée par l'équation

$$\tang \alpha = \frac{\beta}{\beta'},$$

on aura

$$(\psi_{\prime},\alpha) = (\psi_{\prime\prime},\beta)\cdot\frac{d\alpha}{d\beta} + (\psi_{\prime\prime},\beta')\cdot\frac{d\alpha}{d\beta'} = \frac{\cos^2\alpha}{k\sin^2\gamma}\cdot\left(\frac{\beta}{\beta'} - \frac{\beta\beta'}{\beta'^2}\right),$$

c'est-à-dire

$$(\psi_{\prime\prime},\alpha) = 0.$$

Ces valeurs substituées dans la formule (k) donneront, en remarquant que les constantes β, β', β'' ne contiennent pas la variable φ,

$$(g, k) = -1, \quad (g,\gamma) = -\frac{\cos\gamma}{k\sin\gamma}, \quad (g,\alpha) = 0.$$

Il ne nous reste plus à former que la combinaison (g, l); mais au lieu de substituer la constante l à la lettre b, dans la formule (k), il est plus simple de considérer cette constante comme fonction des variables s, t et des constantes h, k; on aura ainsi,

$$(g, l) = (g, s)\cdot\frac{dl}{ds} + (g, h)\cdot\frac{dl}{dh} + (g,k)\cdot\frac{dl}{dk},$$

valeur qui, en observant que $(g, h) = 0$, $(g, k) = -1$, $(g, s) = -\frac{dg}{d\varphi}$, se réduit à

$$(g, l) = -\frac{dg}{d\varphi}\cdot\frac{dl}{ds} - \frac{dl}{dk}.$$

D'ailleurs $g = \text{fonct.}\,(s, \psi_{\prime\prime}, h, k)$, et comme s, $\psi_{\prime\prime}$, k ne contiennent pas la variable φ, on a

$$\frac{dg}{d\varphi} = \frac{dg}{dh} \cdot \frac{dh}{d\varphi};$$

par conséquent,

$$(g,\, l) = -\frac{dh}{d\varphi} \cdot \frac{dl}{ds} \cdot \frac{dg}{dh} + \frac{dl}{dk} = 2 \cdot \frac{dg}{dh} - \frac{dl}{dk},$$

en observant que $\frac{dh}{d\varphi} \cdot \frac{dl}{ds} = (l,\, h) = -2$.

Pour avoir les différences partielles $\frac{dg}{dh}$, $\frac{dl}{dk}$, il faut différencier, sous le signe intégral, par rapport à h et à k, les valeurs de ces deux constantes; on aura ainsi

$$\frac{dg}{dh} = -\int \frac{kdt}{k^2 - s^2} + \tfrac{1}{2} \cdot \int \frac{Ak \cdot (s^2 - Ch) \cdot dt}{(k^2 - s'^2) \cdot [Ck^2 - ACh + (A-C) \cdot s^2]}$$
$$+ \tfrac{1}{2} \cdot \int \frac{Bk \cdot (s^2 - Ch) \cdot dt}{(k^2 - s^2) \cdot [Ck^2 - BCh + (B-C) \cdot s^2]},$$

valeur qui peut se mettre sous cette forme

$$\frac{dg}{dh} = -\tfrac{1}{2} \cdot \int \frac{Ck \cdot dt}{Ck^2 - ACh + (A-C) \cdot s^2} - \tfrac{1}{2} \cdot \int \frac{Ck \cdot dt}{Ck^2 - BCh + (B-C) \cdot s^2}.$$

En différenciant de la même manière, par rapport à k, la valeur de l, on trouve

$$\frac{dl}{dk} = -\int \frac{Ckdt}{Ck^2 - ACh + (A-C) \cdot s^2} - \int \frac{Ckdt}{Ck^2 - BCh + (B-C) \cdot s^2}.$$

Ces valeurs, substituées dans l'expression de $(g,\, l)$, donnent

$$(g,\, l) = 0.$$

7. En réunissant les valeurs des quinze quantités que nous venons de calculer, on trouve

$(h,l)=2, \; (k,g)=1, \; (\gamma,g)=\frac{\cos\gamma}{k\sin\gamma}, \; (\gamma,\alpha)=\frac{1}{k\sin\gamma}.$

Toutes les autres sont nulles, en sorte qu'on a

$$(h,k)=0, \; (h,\gamma)=0, \; (h,\alpha)=0, \; (h,g)=0,$$
$$(l,k)=0, \; (l,\gamma)=0, \; (l,\alpha)=0, \; (l,g)=0,$$
$$(k,\gamma)=0, \; (k,\alpha)=0, \; (g,\alpha)=0.$$

Au moyen de ces valeurs, il est aisé de conclure, en vertu de la formule générale (D), n° 18, livre II,

$$\left.\begin{aligned}
dh &= 2.\frac{dV}{dl}.dt,\\
dl &= -2.\frac{dV}{dh}.dt,\\
dk &= \frac{dV}{dg}.dt,\\
dg &= -\frac{dV}{dk}.dt - \frac{\cos\gamma}{k\sin\gamma}.\frac{dV}{d\gamma}.dt,\\
d\alpha &= -\frac{1}{k\sin\gamma}.\frac{dV}{d\gamma}.dt,\\
d\gamma &= \frac{\cos\gamma}{k\sin\gamma}.\frac{dV}{dg}.dt + \frac{1}{k\sin\gamma}.\frac{dV}{d\alpha}.dt.
\end{aligned}\right\} (P)$$

Ces équations serviront à déterminer les variations que produit sur les six constantes arbitraires qui entrent dans les équations du mouvement de rotation, l'action des forces perturbatrices.

8. Ce qu'on observe d'abord en considérant les formules précédentes, c'est la singulière analogie qu'elles ont avec celles qui déterminent les variations des élémens elliptiques des orbites planétaires. On voit en effet que pour les rendre identiques avec les formules (o) du n° 41, livre II, il suffit de

changer dans ces dernières, $\frac{1}{a}$ en $-h$, φ en γ, et de prendre, au lieu de l'angle α, son supplément. Ce résultat remarquable tient à ce que les constantes dont nous avons fait choix ont une signification semblable dans les deux problèmes. Ainsi, dans le mouvement de translation $-\frac{1}{a}$, et dans le mouvement de rotation h, sont les constantes qui équivalent à la force vive du système. Dans ce dernier cas, γ est l'inclinaison du plan principal de projection sur un plan fixe, α la longitude de son nœud comptée sur ce plan à partir d'une ligne fixe; de même dans le mouvement de translation φ est l'inclinaison sur un plan fixe du plan de la trajectoire, qui est évidemment le plan principal de projection, et α la longitude de son nœud comptée sur ce plan, seulement cet angle n'est pas compté dans le même sens dans les deux cas, d'où résulte la différence de signe qu'on remarque dans les formules qui dépendent de la variation de cet angle; l est la constante ajoutée au temps t, et provient de ce que les équations différentielles du mouvement ne renferment, dans les deux questions, que l'élément de cette variable; k représente l'aire décrite pendant l'unité de temps, sur le plan principal de projection par le rayon vecteur de chacun des élémens du corps en mouvement, multipliée par la masse de cet élément. Enfin, la constante g représente des quantités analogues dans les deux cas.

Ainsi donc les expressions des variations des constantes arbitraires sont identiquement les mêmes dans

le mouvement de translation et dans le mouvement de rotation, et les perturbations qu'éprouvent les corps célestes dans leurs mouvemens, soit autour du Soleil, soit autour de leur centre de gravité, se trouvent ainsi exprimées par les mêmes formules, comme elles dérivent de la même cause. Cet important résultat n'est pas sans doute ce qu'offre de moins remarquable la belle méthode que nous avons employée pour déterminer toutes les inégalités des planètes. Cette méthode, qui réunit dans une même analyse les deux principaux problèmes du système du monde, a de plus l'avantage de présenter sous un même point de vue les différens effets que produisent dans les mouvemens de ces corps leurs attractions mutuelles. On voit que ces effets, qui, au premier aspect, paraissent avoir si peu d'analogie entre eux, se bornent à faire varier par degrés insensibles les arbitraires du mouvement; de sorte qu'en introduisant ces arbitraires ainsi corrigées dans les formules du mouvement qui aurait lieu, abstraction faite des forces perturbatrices, on aura celles qui conviennent au mouvement troublé, et l'on pourra déterminer ainsi, de la manière la plus simple, la valeur des variables qui doivent fixer à chaque instant la situation du corps que l'on considère. Nous ne craignons pas de l'affirmer, cet ingénieux procédé d'analyse, par sa généralité et par la clarté nouvelle qu'il répand sur toutes les parties de la mécanique céleste, est la plus belle conception dont se soit enrichie la théorie du système du monde, depuis les immortelles découvertes de Newton. Ce grand géomètre nous avait montré quelles sont les

forces principales qui donnent le mouvement aux différens corps du système solaire; Lagrange nous a appris à calculer l'effet plus compliqué des forces perturbatrices, et peut être il a posé la limite où devait s'arrêter l'esprit humain dans ces sublimes recherches.

9. On peut donner aux formules (P) différentes formes en substituant aux constantes h, l, k, g, α, γ, de nouvelles arbitraires, et en exprimant leurs différentielles au moyen des différences partielles de la fonction V, prises par rapport à ces mêmes quantités. Remarquons d'abord que g désigne dans ces formules, l'angle compris à l'origine du mouvement entre les intersections du plan principal de projection avec le plan fixe et avec le plan qui contient les deux premiers axes principaux du corps; dg est donc l'accroissement de cet angle pendant l'instant dt; mais l'intersection du plan principal de projection avec le plan fixe est mobile, et $\cos\gamma . d\alpha$ exprime son mouvement pendant l'instant dt projeté sur le premier de ces plans. En désignant donc par ω la longitude de l'intersection de l'équateur du corps avec le plan principal de projection, cette longitude étant comptée sur ce dernier plan à partir d'une ligne fixe, on aura

$$d\omega = dg - \cos\gamma . d\alpha.$$

En considérant d'ailleurs V comme fonction des arbitraires ω et α, on trouve

$$\frac{dV}{dg} = \frac{dV}{d\omega}, \quad \frac{dV}{d\alpha} = \left(\frac{dV}{d\alpha}\right) - \cos\gamma . \frac{dV}{d\omega}.$$

Les trois dernières formules (P) deviendront, ainsi

$$\left.\begin{aligned} d\omega &= \quad dt \cdot \frac{dV}{dk}, \\ d\alpha &= -\frac{dt}{k\sin\gamma} \cdot \frac{dV}{d\gamma}, \\ d\gamma &= \quad \frac{dt}{k\sin\gamma} \cdot \frac{dV}{d\alpha}. \end{aligned}\right\} (Q)$$

En joignant ces expressions aux trois premières équations (P), les variations de toutes les arbitraires se trouveront exprimées par des formules qui ne contiennent qu'un seul terme, ce qui contribue à les simplifier. Si le corps tournait rigoureusement autour de son troisième axe principal, le plan principal de projection coïnciderait avec son équateur; les deux dernières formules précédentes suffiraient donc pour déterminer dans ce cas les mouvemens de ce plan. C'est ce qui a lieu, comme on le verra, relativement à la Terre.

Enfin, si l'on suppose

$$p = \text{tang}\,\gamma \,.\, \sin\alpha, \quad q = \text{tang} \,.\, \cos\alpha,$$

on trouvera

$$\frac{dV}{d\alpha} = q \cdot \frac{dV}{dp} - p \cdot \frac{dV}{dq},$$

$$\frac{dV}{d\gamma} = \frac{\sin\alpha}{\cos^2\gamma} \cdot \frac{dV}{dp} + \frac{\cos\alpha}{\cos^2\gamma} \cdot \frac{dV}{dq},$$

et par suite

$$dp = -\frac{dt}{k.\cos^3\gamma} \cdot \frac{dV}{dq},$$

$$dq = \quad \frac{dt}{k.\cos^3\gamma} \cdot \frac{dV}{dp};$$

formules qu'il est avantageux de substituer aux deux dernières équations (Q), lorsque γ est un très petit angle.

10. Il nous suffira maintenant de développer chacune des formules (P), pour en voir résulter tous les phénomènes que cause, dans le mouvement de rotation des planètes, l'action des forces perturbatrices; mais comme la situation initiale du corps, sa figure et ses dimensions ont sur ce mouvement la plus grande influence, il serait inutile d'examiner d'une manière générale ces formules, comme nous l'avons fait dans le problème de la translation des corps célestes, et nous déterminerons séparément les inégalités du mouvement de rotation de la Terre et de la Lune, qui sont les seules planètes pour lesquelles l'état de l'Astronomie ait permis jusqu'ici de comparer sur ce point la théorie à l'observation. Cependant, parmi les arbitraires du mouvement de rotation, il en est une dont la variation donne lieu à des remarques importantes; c'est celle qui entre dans l'équation des forces vives nous allons par cette raison la considérer ici en particulier.

La première des formules (P) donne, pour déterminer la variation de la constante h, l'équation

$$dh = 2 \cdot \frac{dV}{dl} \cdot dt.$$

On peut faire prendre à cette expression une autre forme. En effet, l étant la constante qui est jointe au temps t dans les expressions finies des variables φ, ψ, θ, il est clair que si l'on regarde V comme une fonction donnée de ces variables, on aura

$$\frac{dV}{dl} = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} + \frac{dV}{d\psi} \cdot \frac{d\psi}{dt} + \frac{dV}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt};$$

par conséquent

$$dh = 2.\left(\frac{dV}{d\varphi}.\,d\varphi + \frac{dV}{d\psi}.\,d\psi + \frac{dV}{d\theta}.d\theta\right)$$

ou bien simplement

$$dh = 2.d'V, \qquad (l)$$

en désignant par la caractéristique d', la différentielle de V prise en y faisant varier le temps t introduit par la substitution des valeurs des coordonnées φ, ψ, θ du corps dont on considère la rotation, et en regardant comme constant celui que cette fonction peut contenir à raison du mouvement des astres attirans.

On doit observer d'abord que cette formule peut s'obtenir directement et indépendamment de celles qui déterminent les variations des autres constantes; elle résulte immédiatement, en effet, de la quatrième des équations (d), différenciée par rapport aux variables et aux constantes qu'elle renferme, pour avoir égard aux forces perturbatrices, en observant qu'on a, n° 4,

$$Apdp + Bqdq + Crdr = d'V.$$

La même remarque s'applique au mouvement de translation, et en général au mouvement d'un système de corps, quelle que soit leur liaison entre eux, puisque l'équation des forces vives a lieu dans toute espèce de système qui n'est sollicité que par l'action mutuelle de ses différentes parties et par des forces dirigées vers des centres fixes. Nous allons maintenant

démontrer une propriété importante qui résulte de la formule (k), et qui consiste en ce que la constante h, devenue variable par l'action des forces perturbatrices, ne peut contenir le temps t que sous la forme périodique, lorsque la fonction perturbatrice V ne le contient que sous cette forme.

En effet, lorsqu'on n'a égard qu'à la première puissance des forces perturbatrices, ce qui permet de regarder comme constantes les arbitraires qui entrent dans V, si cette fonction ne contient le temps que sous les signes sinus ou cosinus, il est clair que la différenciation relative à t fera disparaître tous les termes indépendans du temps, ou qui le contiendraient simplement à raison du mouvement des astres attirans; et par conséquent, l'intégration ne pourra donner, dans la valeur de h, aucun terme non périodique ou de la forme Nt qui croisse avec le temps t.

Il existe cependant une circonstance où ce résultat cesserait d'avoir lieu et qu'il est important d'examiner, parce que le système planétaire en offre un exemple. Pour cela, supposons la fonction V développée en série dont les différens termes soient de cette forme

$$H. \begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix} (int - i'n't + K);$$

H et K étant des fonctions des arbitraires h, k, etc.; l'angle nt étant le moyen mouvement de rotation du sphéroïde autour de son centre de gravité et l'angle $n't$ le moyen mouvement de l'astre attirant, i et i' des

nombres entiers quelconques. Il est aisé de voir que ce terme produira, dans dh, le suivant

$$2H \cdot in \cdot {}^{\cos}_{\sin}(int - i'n't + K);$$

et en l'intégrant, il en résultera un terme périodique dans h, à moins que l'on n'ait $int - i'n't = 0$, ce qui exige que les coefficiens n et n' soient commensurables entre eux. Or, ce cas particulier a lieu dans le mouvement de rotation de la Lune, altéré par l'action de la Terre. Le moyen mouvement de rotation de la Lune est exactement égal à son moyen mouvement de révolution autour de la Terre, et ce rapport singulier produit, comme on le verra, le phénomène de sa libration.

11. Démontrons que le résultat précédent subsiste encore dans la seconde approximation, où l'on tient compte des termes dépendans du carré des forces perturbatrices. En effet, pour avoir égard à ces termes, il faut à la place des constantes h, k, l, g, γ, α, substituer ces arbitraires augmentées de leurs variations déterminées par l'intégration des formules (P); on aura ainsi

$$\delta V = \frac{dV}{dh}.\delta h + \frac{dV}{dl}.\delta l + \frac{dV}{dk}.\delta k + \frac{dV}{dg}.\delta g + \frac{dV}{d\gamma}.\delta\gamma + \frac{dV}{d\alpha}.\delta\alpha,$$

et, en ne considérant que les termes de l'ordre du carré des forces perturbatrices,

$$dh = 2.d'.\delta V.$$

Substituons dans l'expression précédente de δV, pour

δh, δl, δk, etc., leurs valeurs, on aura

$$\begin{aligned}\delta V = 2.\Big(&\frac{dV}{dh}.\int\frac{dV}{dl}.dt - \frac{dV}{dl}.\int\frac{dV}{dh}.dt\Big)\\ &+ \frac{dV}{dk}.\int\frac{dV}{dg}.dt - \frac{dV}{dg}.\int\frac{dV}{dk}.dt\\ &+ \frac{\cos\gamma}{k\sin\gamma}.\Big(\frac{dV}{d\gamma}.\int\frac{dV}{dg}.dt - \frac{dV}{dg}.\int\frac{dV}{d\gamma}.dt\Big)\\ &+ \frac{1}{k\sin\gamma}.\Big(\frac{dV}{d\gamma}.\int\frac{dV}{d\alpha}.dt - \frac{dV}{d\alpha}.\int\frac{dV}{d\gamma}.dt\Big).\end{aligned}$$

Pour avoir la différentielle $d'.\delta V$, il faut différencier cette expression par rapport au temps t contenu dans les valeurs de $\varphi + \delta\varphi$, $\psi + \delta\psi$, $\theta + \delta\theta$, c'est-à-dire qu'il faut, 1°. différencier totalement les quantités renfermées sous les signes intégrales, ce qui revient à effacer les signes $\int$, et alors cette expression se réduit à zéro; 2°. différencier seulement par rapport au temps t contenu dans les valeurs des variables φ, ψ, θ, les quantités hors du signe $\int$. L'expression de δV est composée de termes de la forme

$$A\int Bdt - B\int Adt,$$

A et B pouvant, par l'hypothèse, se développer en une suite de termes de la forme $H\,{}^{\sin}_{\cos}.(it + ft + K)$, dans lesquels H, i, K sont des fonctions des constantes h, k, l, etc., et ft des angles qui proviennent des mouvemens des astres attirans. Soit donc $H.\cos(ft + mt + K)$ un terme quelconque de A, et soit $H'\cos(ft + mt + K')$ le terme correspondant de B qui a le même argument, il faudra que l'on combine ensemble ces deux termes pour avoir dans $d'.(A.\int Bdt - B.\int Adt)$ des quantités non périodiques.

Or, on trouve ainsi

$$d.(A.\int B dt - B.\int A dt) = -\frac{HH'f}{f+m} \times [\sin(ft+mt+K).\sin(ft+mt+K') - \sin(ft+mt+K').\sin(ft+mt+K)],$$

quantité qui se réduit à zéro.

Il suit de là, par conséquent, que si l'expression de V est périodique, la valeur de δh ne contiendra que des termes semblables, du moins tant qu'on n'aura égard, dans les approximations, qu'aux premières et secondes puissances des forces perturbatrices.

On voit que le résultat auquel nous sommes parvenus dans le chapitre VIII, livre II, sur l'invariabilité des grands axes des orbites planétaires, n'était qu'un cas particulier d'une propriété générale dont jouit la variation de la constante arbitraire qui entre dans l'équation des forces vives.

Dans le mouvement de rotation, h représente la force vive du corps en mouvement, et l'on a

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h.$$

Les trois quantités p, q, r, sont les vitesses de rotation du corps autour des trois axes principaux qui se croisent à son centre de gravité, en sorte que si l'on nomme ρ la vitesse du corps autour de son axe instantané de rotation et a, b, c les angles qu'il forme avec les trois premiers axes, on a

$$p = \rho.\cos a, \quad q = \rho.\cos b, \quad r = \rho.\cos c;$$

l'équation des forces vives deviendra donc ainsi

$$\rho^2.(A\cos^2 a + B\cos^2 b + C\cos^2 c) = h.$$

Le second membre de cette équation ne contenant aucun terme croissant, comme le temps t, le premier ne peut renfermer non plus aucun terme pareil, et comme tous les termes du premier membre sont de même signe, il s'ensuit que chacun d'eux n'est composé que de termes périodiques.

On peut conclure de là que la vitesse de rotation et la position de l'axe instantané ne sauraient être affectées d'aucune inégalité croissant comme le temps; et que l'action des forces perturbatrices ne peut y causer que des altérations alternatives dont la période dépendant du mouvement du sphéroïde autour de son centre de gravité, ou de celui des astres attirans dans leur orbite, sera toujours assez courte.

Il faut remarquer ici que nous n'avons pas eu égard, dans la valeur de V, aux termes qui proviennent de la variation des élémens des orbites des astres attirans; il faut donc restreindre, en ce sens, la généralité des résultats précédens.

Après ces résultats généraux, applicables à tous les corps du système solaire, nous allons examiner en particulier les mouvemens de rotation de la Terre et de la Lune. On verra qu'ils présentent tous deux des phénomènes extrêmement importans qui, quoique très différens, peuvent se déduire directement des formules que nous venons de développer.

CHAPITRE II.

Du mouvement de la Terre autour de son centre de gravité.

12. Hipparque paraît être le premier, parmi les astronomes, qui ait remarqué que les étoiles ne sont pas fixes, relativement à nous, et que leur position rapportée au plan de l'équateur varie dans les différens siècles. En comparant ses propres observations à celles de Tymocharis, faites 155 ans auparavant, il s'aperçut que, dans ce mouvement, leur hauteur au-dessus du plan de l'écliptique restait la même, en sorte que leurs latitudes n'étaient point altérées, tandis que leurs longitudes, rapportées à l'équinoxe, augmentaient chaque année d'une quantité à peu près constante pour toutes les étoiles. Il conclut de là que la sphère céleste a un mouvement autour des pôles de l'écliptique, d'où résultent les changemens observés dans les ascensions droites et les déclinaisons des étoiles, et l'invariabilité de leurs distances à ce plan, comme l'observation l'indique. Copernic, occupé toute sa vie à substituer aux mouvemens apparens des astres, leurs mouvemens réels et à redresser des erreurs nées des illusions de nos sens et d'un sentiment exagéré de notre importance, reconnut que les mêmes

phénomènes pouvaient s'expliquer en supposant aux pôles de la Terre un mouvement circulaire de rotation autour des pôles de l'écliptique. Pendant ce mouvement, l'inclinaison de l'équateur à l'écliptique reste la même, mais ses nœuds, ou les équinoxes, rétrogradent uniformément de 50″ environ par an, d'où résulte par conséquent un accroissement égal des longitudes des étoiles rapportées à ces points. C'est en cela que consiste le phénomène désigné sous nom de *la précession des équinoxes*.

L'hypothèse de Copernic suffirait donc pour expliquer de la manière la plus simple les variations observées par Hipparque dans la position des étoiles, et confirmées par tous les astronomes qui sont venus après lui. Mais les rapides progrès de l'Astronomie depuis l'invention des lunettes firent bientôt découvrir de nouveaux phénomènes dans ces variations; il fallut, pour les expliquer, supposer divers mouvemens à l'axe de la Terre, et c'est ainsi que Bradley fut conduit à la connaissance de leurs véritables lois.

Ce grand astronome, par la précision de ses observations, reconnut dans la position des étoiles une variation annuelle qu'il suivit pendant une période de dix-huit années, après laquelle elles lui semblèrent revenir à la même position. La coïncidence de cette période avec celle du mouvement des nœuds de la Lune lui fit penser que l'axe de la Terre avait, par rapport aux étoiles, un mouvement périodique dépendant de la longitude de ces nœuds; et pour représenter en conséquence le vrai mouvement de

l'axe terrestre, il suppose que l'extrémité de cet axe prolongé jusqu'au ciel, se meut sur la circonférence d'une petite ellipse tangente à la sphère céleste, et dont le centre, qu'on peut regarder comme le lieu moyen du pôle de l'équateur, est situé sur un petit cercle de la sphère parallèle à l'écliptique, et décrit annuellement d'un mouvement uniforme un arc de 63″ sur ce cercle. L'observation fait connaître les dimensions de cette ellipse, et les lois du mouvement du pôle sur sa circonférence, d'où résulte dans l'axe terrestre cette espèce de balancement qu'on a nommée *la nutation*.

Ainsi, l'observation devança, sur ce point, la théorie, et tous les phénomènes qui dépendent des déplacemens de l'axe de la Terre étaient parfaitement connus avant qu'on eût tenté d'en approfondir les causes. Képler avait avoué l'inutilité de ses recherches à cet égard, et c'est à Newton qu'il était réservé de nous montrer comment ils se lient, par la loi de la pesanteur universelle, aux autres phénomènes du mouvement des corps célestes, avec lesquels, jusque là, ils ne semblaient avoir aucun rapport. Il fit plus, il essaya d'en déterminer les lois par la théorie. Considérant la Terre comme un sphéroïde renflé à son équateur, il la suppose composée d'une sphère dont le diamètre est l'axe des pôles, et de l'excès du sphéroïde terrestre sur cette sphère disposé sous la forme d'un anneau autour de son équateur. Il regarde ensuite chaque molécule de cet anneau comme un astre adhérent à la Terre et qui fait sa révolution autour d'elle en vingt-quatre heures, et de là il conclut que l'ac-

tion du Soleil sur chacun de ces astres, et par conséquent sur l'anneau entier, devait produire le même effet que celui qu'il produit sur la Lune, et faire rétrograder les nœuds de son orbite sur le plan de l'écliptique. Le mouvement rétrograde se communique à la Terre entière, à cause de l'adhérence de l'anneau à la sphère qu'il entoure, et il s'ensuit que l'intersection de l'équateur terrestre et de l'écliptique, ou la ligne des équinoxes, doit avoir, par l'action du Soleil, un mouvement rétrograde comme les observations l'indiquent; mais, quelque ingénieux que soit cet aperçu, il y avait encore loin de là à une théorie approfondie et complète des lois du mouvement de l'axe terrestre. Newton lui-même se trompa en voulant les en déduire par des considérations purement rationnelles, et l'analyse, ce puissant auxiliaire de l'esprit humain, pouvait seule montrer, dans cette question délicate, l'accord parfait de la théorie et de l'observation; mais il fallait auparavant en reculer les limites. D'Alembert eut la gloire d'y réussir, et la solution qu'il donna le premier du problème de la précession des équinoxes doit être regardée comme une des plus belles conceptions de son génie inventif, si l'on considère l'insuffisance des moyens qu'offraient alors pour cet objet l'Analyse et la Mécanique.

D'Alembert explique par la théorie les divers mouvemens de l'axe terrestre, par rapport aux étoiles, et montre que la nutation observée par Bradley en est une conséquence immédiate. Il détermine le rapport exact des deux axes de la petite ellipse que décrit le pôle, et la loi de son mouvement sur son el-

lipse. En comparant ensuite ses expressions de la nutation et de la précession aux observations, il en conclut le rapport de la masse de la Lune à celle du Soleil; mais il observe, en même temps, qu'il suffirait d'un très petit changement dans ce rapport, pour altérer considérablement les lois de ces phénomènes. Enfin, il donne, d'après les mêmes expressions, la loi de décroissement de densité des couches de la Terre et détermine son ellipticité.

Tels sont les principaux résultats de la théorie établie par d'Alembert. L'Analyse, en se perfectionnant, a depuis permis de la présenter d'une manière plus simple et de l'étendre à des points qui n'avaient point été abordés par ce géomètre.

Le premier de tous, par son importance, est la détermination des mouvemens de l'axe instantané de rotation de la Terre dans l'intérieur du globe. Cette question, comme il est aisé de le concevoir, est pour le moins aussi intéressante pour nous que celle qui a pour but de déterminer les mouvemens de cet axe, par rapport aux étoiles, la seule dont d'Alembert se soit occupé. En effet, si l'axe de rotation variait dans l'intérieur de la Terre, chacun de ces mouvemens déplacerait son équateur, et toutes les latitudes géographiques en seraient, à la longue, sensiblement altérées; il y a plus, les mers, troublées dans leur équilibre, suivraient les mouvemens de l'équateur, et descendant vers la partie de la Terre qui s'est abaissée sous elles, laisseraient dans la partie opposée de nouvelles régions à découvert. Les observations, il est vrai, montrent bien que l'axe terrestre n'est soumis à au-

cune variation sensible dans l'intervalle d'un jour et même de plusieurs années; mais s'il était sujet à quelque inégalité à longue période du genre de celles que nous avons nommées inégalités séculaires, les observations astronomiques, qui ne comprennent encore qu'un assez court intervalle de temps, ne suffiraient pas pour rassurer sur les conséquences de ces variations, et ne sauraient rien nous apprendre sur leur marche. C'est donc à la théorie seule qu'il était réservé d'éclairer cette grande question, et M. Poisson est le premier qui l'ait traitée avec tout le soin que son importance exigeait.

Il a montré, par une savante analyse, que l'action du Soleil et de la Lune n'introduisait dans l'expression des variables qui fixent la position de l'axe terrestre dans l'intérieur du globe, aucune inégalité à longue période que la suite des siècles puisse rendre sensible, même lorsqu'on a égard à la seconde puissance des forces perturbatrices. Il en est de même de l'expression de la vitesse de rotation de la Terre autour de cet axe. Il en résulte que cette vitesse est constante, et que les pôles de rotation et l'équateur terrestre sont inaltérables à la surface de la Terre.

Nous confirmerons, d'une manière nouvelle, ces deux résultats importans; nous examinerons ensuite les mouvemens de l'axe terrestre par rapport aux étoiles, et nous déduirons des formules exposées dans le chapitre précédent, les équations très simples d'où dépendent les lois de sa nutation et de la précession des équinoxes.

La durée de l'année, qui se mesure par le retour

lipse. En comparant ensuite ses expressio[illegible]
nutation et de la précession aux observat[illegible]
conclut le rapport de la masse de la Lu[illegible]
Soleil ; mais il observe, en même tem[illegible]
rait d'un très petit changement dans [illegible]
altérer considérablement les lois d[illegible]
Enfin, il donne, d'après les m[illegible]
loi de décroissement de densité [illegible]
et détermine son ellipticité.

Tels sont les principaux [illegible]
blie par d'Alembert. L'An[illegible]
a depuis permis de la [illegible]
simple et de l'étendre [illegible] ulées
été abordés par ce g[illegible] it, les lon-

Le premier de [illegible] éduirait ne s'ac-
termination des [illegible] celles qui résultent de
tation de la Te[illegible] ait donc important de s'as-
tion, comm[illegible] de l'invariabilité du jour moyen
moins aus[illegible] s verrons, en effet, que ces inégalités
pour but [illegible]nt pas à quelques secondes en plusieurs
rappor[illegible] de siècles, leur considération est à peu près
occur[illegible] aux astronomes.

rie[illegible] Enfin, pour compléter l'exposition analytique des
phénomènes de la précession et de la nutation, nous
réduirons en nombres les formules qui les déter-
minent, en employant les données les plus exactes
que nous ayons sur les masses des planètes, et nous
les comparerons ensuite à quelques observations
anciennes, qui, par leur accord avec les résultats de
ces formules, montreront la précision de la théorie.

Les phénomènes de la précession et de la nuta-

du Soleil au même équinoxe ou au même tropique, serait constante si le mouvement des équinoxes était uniforme, mais ses inégalités doivent le faire varier dans les différens siècles. Cette longueur est plus courte lorsque le mouvement s'accélère; c'est ce qui arrive actuellement, et la durée de l'année tropique est de nos jours moindre d'environ 10″ qu'au temps d'Hipparque. La même cause, jointe aux variations de l'obliquité de l'écliptique et de la précession des équinoxes, introduit des inégalités dans la durée du jour moyen solaire, et leur détermination serait importante si elles pouvaient devenir sensibles, parce que toutes les tables astronomiques étant calculées dans l'hypothèse d'un jour moyen constant, les longitudes et les latitudes qu'on en déduirait ne s'accorderaient bientôt plus avec celles qui résultent de l'observation directe. Il était donc important de s'assurer par la théorie de l'invariabilité du jour moyen solaire, et nous verrons, en effet, que ces inégalités ne s'élevant pas à quelques secondes en plusieurs millions de siècles, leur considération est à peu près inutile aux astronomes.

Enfin, pour compléter l'exposition analytique des phénomènes de la précession et de la nutation, nous réduirons en nombres les formules qui les déterminent, en employant les données les plus exactes que nous ayons sur les masses des planètes, et nous les comparerons ensuite à quelques observations anciennes, qui, par leur accord avec les résultats de ces formules, montreront la précision de la théorie.

Les phénomènes de la précession et de la nuta-

tion dépendant de la figure et de la constitution du sphéroïde terrestre, il en résulte qu'on peut, au moyen de l'observation de ces phénomènes, établir le rapport qui doit exister entre les lois de la densité et de l'ellipticité des couches de la Terre. On verra que l'ellipticité qui en résulte s'accorde très bien avec celle qu'on a conclue des observations du pendule à différentes latitudes et des autres phénomènes qui en dépendent. Les lois de la précession indiquent de plus une diminution dans la densité des couches du sphéroïde terrestre, en allant du centre à la surface; résultat qui s'accorde avec les expériences de Cavendish, sur l'attraction des montagnes, et avec les principes de l'hydrostatique qui exigent que si la Terre est supposée avoir été originairement fluide, les parties les plus denses soient en même temps les plus rapprochées de son centre. L'admirable concordance de tous ces phénomènes si étrangers l'un à l'autre, montre évidemment qu'ils ont tous pour principe la même cause, et l'on doit la regarder comme la preuve la plus irrécusable de la loi de la pesanteur universelle.

13. Pour traiter dans toute sa généralité la question du mouvement de la Terre autour de son centre de gravité, nous supposerons d'abord qu'aucune force accélératrice ne trouble le mouvement de rotation résultant de l'impulsion primitive qu'elle a reçue, et nous verrons quelles ont dû être, dans ce cas, les circonstances initiales du mouvement, pour que les résultats de la théorie s'accordent avec les phénomènes observés. Nous considérerons ensuite l'action pertur-

$$\theta = h + \frac{K.(1-i)}{2.(n+n')}.\cos(nt+n't+l+\iota) - \frac{K.(1+i)}{2.(n-n')}.\cos(nt-n't+l-\iota),$$

h étant une constante arbitraire.

Il suit de cette analyse, que si la constante K avait une valeur sensible, les pôles feraient à la surface de la Terre des oscillations d'une étendue arbitraire, dont la période dépendrait des momens d'inertie du sphéroïde terrestre, et serait, d'après les données que l'on a sur les valeurs de A, B, C, d'environ deux années. L'angle θ changerait aussi de valeur durant cet espace de temps; il aurait de plus des inégalités dépendantes de l'angle nt, c'est-à-dire qu'il varierait même dans le court intervalle d'une journée : or, les observations les plus précises n'ayant jamais fait apercevoir dans la hauteur du pôle aucune variation de ce genre, il en faut conclure que K est insensible, et que, par conséquent, on peut supposer que les oscillations de l'axe terrestre qui dépendent de l'état initial du mouvement sont depuis long-temps anéanties, et qu'il ne subsiste maintenant que celles qui ont une cause permanente.

14. Comme les valeurs que nous avons trouvées, n° 34, livre Ier, pour p et q, ne sont qu'approchées, il pourrait rester quelque doute sur l'exactitude du résultat précédent ; mais il est facile de la démontrer d'une manière tout-à-fait rigoureuse par les considérations suivantes. En intégrant directement les équations (a), nous avons obtenu, n° 35, livre Ier, ces deux intégrales,

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h, \quad A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = k^2.$$

Si, après avoir multiplié la première par C, on la retranche de la seconde, on aura

$$A.(C-A).p^2+B.(C-B).q^2=D^2, \quad (m)$$

en représentant, pour abréger, par D^2 la quantité constante $Ch-k^2$.

On voit, par cette équation, que si les valeurs de p et q sont supposées très petites à un instant quelconque, la constante du second membre sera aussi très petite; les quantités p et q demeureront donc toujours peu considérables, puisque chacune d'elles sera moindre que la constante D. Par conséquent, si ces quantités n'ont que des valeurs inappréciables, comme cela a lieu à l'époque où nous sommes, on peut être assuré qu'elles resteront éternellement insensibles; on aura, dans tous les temps,

$$p<\frac{D}{\sqrt{A.(C-A)}}, \quad q<\frac{D}{\sqrt{B.(C-B)}},$$

et l'axe de rotation de la Terre coïncidera toujours à très peu près avec son troisième axe principal.

Ce résultat suppose tous les termes du premier membre de l'équation (m) de même signe, ce qui exige que C soit le plus grand ou le plus petit des momens d'inertie relatifs aux axes principaux qui se croisent au centre de gravité du corps. C'est, en effet, ce qui a lieu pour la Terre, sa figure étant celle d'un sphéroïde aplati vers ses pôles, l'axe autour duquel elle semble tourner, à très peu près, est le plus petit de ses trois axes principaux, et par conséquent celui auquel se rapporte le plus grand moment d'iner-

tie. Dans le cas contraire, on ne pourrait rien conclure de l'équation (m) relativement aux quantités p et q; mais on voit aussi qu'alors les sinus et cosinus que renferment les valeurs de p et q se changent en exponentielles; elles pourraient donc croître indéfiniment avec le temps, et l'équilibre du globe terrestre en serait à la longue entièrement bouleversé.

Nous n'aurons donc plus à nous occuper désormais que de l'action des forces perturbatrices sur le sphéroïde terrestre : nous examinerons dans les chapitres suivans leur influence sur les déplacemens des pôles à la surface de la Terre, sur les variations de sa vitesse de rotation, et enfin sur les mouvemens de ses axes principaux autour du centre de gravité. Ces différentes questions renferment des résultats extrêmement importans pour la théorie du système du monde. Des deux premières dépendent la permanence des latitudes géographiques; l'invariabilité du jour sidéral, cette donnée si précieuse pour tous les calculs astronomiques; enfin, la stabilité même de l'univers. La dernière comprend tous les phénomènes relatifs aux mouvemens de l'équateur, par rapport aux étoiles, c'est-à-dire la précession des équinoxes et la nutation de l'axe de rotation de la Terre. On verra la solution de ces questions, qui avait exigé jusqu'ici tous les efforts de l'analyse la plus compliquée, résulter de la manière la plus simple et la plus complète des formules générales que nous avons développées dans le chapitre précédent; ces formules, comme nous l'avons dit, s'appliquent également au mouvement de la Lune troublé par l'ac-

tion de la Terre ; mais les conséquences que nous allons en tirer ne doivent pas s'étendre à cet astre, à cause du rapport commensurable qui existe entre le moyen mouvement de rotation de la Lune et le moyen mouvement du centre de la force perturbatrice.

CHAPITRE IV.

Déplacement des pôles à la surface de la Terre et variation de la vitesse de rotation.

15. Nous supposerons, dans ce qui va suivre, que sans l'action du Soleil et de la Lune, la Terre tournerait rigoureusement autour de son troisième axe principal, en sorte que les écarts de l'axe instantané de rotation ne peuvent être attribués qu'à l'action des forces perturbatrices. Cette hypothèse est fondée sur les résultats du chapitre précédent, où nous avons démontré que les oscillations de l'axe de rotation de la Terre, dues à l'état initial du mouvement, demeureront toujours insensibles.

Il suit de là que les quantités p et q sont de l'ordre des forces perturbatrices, puisque la fonction $\frac{\sqrt{p^2+q^2}}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$, qui exprime le sinus de l'angle formé par l'axe instantané avec le troisième axe principal, doit être nulle en même temps qu'elles.

Cela posé, la troisième équation (C), n° 2, donne, en l'intégrant et en négligeant les quantités de cet ordre, $r=n$. La constante n exprime, aux quantités près du premier ordre, la vitesse de rotation de la Terre,

car cette vitesse est égale à $\sqrt{p^2+q^2+r^2}$, qui ne diffère de r qu'aux quantités près du second ordre.

Les deux dernières équations (a), n° 1, montrent que les différentielles $d\theta$ et $d\psi$ sont du même ordre que p et q; les angles θ et ψ sont donc constans quand on néglige les quantités du premier ordre. Dans ce cas, la première de ces trois équations se réduit à $d\varphi = ndt$, d'où l'on tire $\varphi = nt + \varepsilon$, ε étant une constante arbitraire.

Les équations (o), n° 35, livre Ier, qui déterminent la position de l'équateur, par rapport au plan principal de projection, ou au plan qui serait invariable sans l'action des forces perturbatrices, donnent

$$\sin\theta_{,}\sin\varphi_{,} = -\frac{Ap}{k}, \quad \sin\theta_{,}\cos\varphi_{,} = -\frac{Bq}{k};$$

on tire de là

$$\sin\theta_{,} = \frac{\sqrt{Ap^2+Bq^2}}{k}.$$

L'angle $\theta_{,}$ représente l'inclinaison de l'équateur sur le plan principal de projection : cet angle est, comme on voit, de l'ordre des forces perturbatrices; on pourra donc le supposer nul, lorsqu'on néglige les quantités de cet ordre, et l'on aura alors, n° 35, livre Ier,

$$\theta = \gamma, \quad \psi = \alpha, \quad \varphi = \varphi_{,} - \psi_{,},$$

ce qui doit, en effet, résulter de la coïncidence de l'équateur et du plan principal de projection.

16. Reprenons maintenant l'équation (m) à laquelle

nous sommes parvenus n° 14, savoir :

$$A.(A-C).p^2+B.(B-C).q^2=k^2-Ch. \quad (m)$$

Cette équation étant une intégrale première des équations (a), doit encore subsister dans le cas où l'on a égard aux forces perturbatrices. Si on la différencie en y traitant h et k comme variables, on aura

$$A.(A-C).pdp+B.(B-C).qdq=kdk-\tfrac{1}{2}.Cdh.$$

Pour abréger, faisons $k^2-Ch=2K$; en différenciant et en substituant pour dk et dh leurs valeurs, on aura

$$dK=\left(k.\frac{dV}{dg}-C.d'V\right).dt. \quad (n)$$

Si l'on néglige les quantités du second ordre par rapport aux forces perturbatrices, et qu'on regarde V comme une fonction donnée des variables φ, ψ, θ, il suffira, dans l'équation précédente, de substituer dans V, qui est déjà du premier ordre, pour φ, ψ, θ, leurs valeurs indépendantes des forces perturbatrices; on pourra donc mettre $\varphi_{,}-\psi_{,}$ à la place de φ, et α et γ à la place de ψ et de θ. Or, on voit, d'après les valeurs de $\varphi_{,}$ et de $\psi_{,}$ données n° 35, livre Ier, que la différence $\varphi_{,}-\psi_{,}$ est égale à la constante g augmentée d'une certaine fonction de p, q, r, h, k; et comme les valeurs de p, q, r ne renferment aucune des trois constantes α, γ, g, il s'ensuit qu'on aura

$$\frac{dV}{dg}=\frac{dV}{d\varphi}; \quad \frac{dV}{d\alpha}=\frac{dV}{d\psi}; \quad \frac{dV}{d\gamma}=\frac{dV}{d\theta}.$$

D'ailleurs, en négligeant les forces perturbatrices, on a $\varphi = nt + \varepsilon$; par conséquent,

$$\frac{d\text{V}}{d\varphi} = \frac{d\text{V}}{ndt}.$$

Quant à la constante k qui multiplie une quantité du premier ordre dans l'équation (n), nous remarquerons que si l'on néglige les quantités de cet ordre, p et q sont nulles, et l'on a $r = n$; l'équation $k^2 = \text{A}^2p^2 + \text{B}^2q^2 + \text{C}^2r^2$ donne donc, dans ce cas, $k = \text{C}n$. L'équation (n) deviendra, par la substitution de ces valeurs,

$$d\text{K} = \text{C}.\frac{d\text{V}}{ndt}.ndt - \text{C}.d'\text{V} = 0.$$

En observant que $d'\text{V}$ désigne la différentielle de V prise en ne faisant varier que le temps t introduit par la substitution de la valeur de φ, c'est-à-dire qu'autant qu'il est multiplié par la constante n.

La quantité K est donc constante, tant qu'on n'a égard qu'à la première puissance des forces perturbatrices; voyons maintenant ce que devient la variation $d\text{K}$, lorsqu'on considère le carré de ces forces. Dans ce cas, il faut, dans l'équation (n), substituer $\text{C}n + \delta k$ à la place de k, et $\text{V} + \delta\text{V}$ à la place de V, δk désignant une quantité du premier ordre et δV une quantité du second; on aura ainsi, en négligeant les quantités du troisième ordre,

$$d\text{K} = \delta k.\frac{d\text{V}}{d\varphi}.dt + \text{C}n.\frac{d.\delta\text{V}}{d\varphi}.dt - \text{C}.d'.\delta\text{V}.$$

Nous avons trouvé, n° 11, en négligeant les quantités d'un ordre supérieur au second,

$$\delta V = \frac{dV}{dh}.\delta h + \frac{dV}{dl}.\delta l + \frac{dV}{dk}.\delta k + \frac{dV}{dg}.\delta g + \frac{dV}{d\alpha}.\delta\alpha + \frac{dV}{d\gamma}.\delta\gamma.$$

Dans les différences partielles de V, on peut substituer $nt+\varepsilon$ à la place de φ, et regarder ψ et θ comme constans; il faut aussi avoir soin, en prenant la différence partielle de δV par rapport à g, de ne point faire varier la quantité g introduite par la substitution des valeurs de δh, δl, etc. Si l'on différencie de cette manière, et si l'on observe que $\frac{dV}{dg} = \frac{dV}{ndt}$, on aura évidemment

$$\frac{d.\delta V}{dg} = \frac{d.\delta V}{ndt} = \frac{1}{n}.d'.\delta V.$$

L'équation (n), en remarquant que $d.\delta k = \frac{dV}{dg}.dt$, donnera donc simplement

$$dK = \delta k.d.\delta k,$$

d'où, en intégrant, l'on tire

$$K = \tfrac{1}{2}.\delta k^2.$$

La quantité K sera donc toujours une quantité du second ordre. L'équation (m), en y substituant cette valeur, devient

$$A.(A-C).p^2 + B.(B-C).q^2 = \delta k^2.$$

Il en résulte que quelques variations qu'éprouvent dans la suite des siècles les valeurs de p et de q, ces

quantités resteront toujours du même ordre que δk, c'est-à-dire de l'ordre des forces perturbatrices, et par conséquent insensibles.

Nous avons prouvé, d'une manière générale, dans le n° 11, que les inégalités séculaires que renferment les valeurs de p et q sont de l'ordre des forces perturbatrices; nous voyons ici que dans le cas particulier où l'on considère le mouvement de rotation de la Terre, toutes les inégalités périodiques que ces quantités contiennent sont aussi du même ordre, d'où l'on doit généralement conclure qu'elles ne peuvent être sujettes à aucune espèce d'inégalités qu'un long intervalle de temps puisse rendre sensibles.

17. Nous n'avons, il est vrai, considéré dans la valeur de dk que les termes dépendans du carré des forces perturbatrices; mais il est aisé d'étendre la même analyse, et les conséquences que nous en avons tirées, à toutes les approximations suivantes. En effet, désignons en général par $\delta_i V$ les termes de la valeur de V qui sont de l'ordre $i+1$, par rapport aux forces perturbatrices; par $\delta_{i+1} k$ les termes du même ordre de la valeur de k, en sorte qu'on ait

$$d.\delta_{i+1} k = \frac{d.\delta_i V}{dg}.dt.$$

L'équation (n), en ne considérant que les termes de l'ordre $i+1$, donnera

$$dK = Cn.\frac{d.\delta_i V}{dg}.dt - C.d'.\delta_i V$$
$$+ \delta_1 k.d.\delta_i k + \delta_i k.d.\delta_i k + \delta_2 k.d.\delta_{i-1} k$$
$$+ \delta_{i-1} k.d.\delta_2 k \ldots \delta_{\frac{i+1}{2}} k.d.\delta_{\frac{i+1}{2}} k.$$

Il est aisé de prouver, comme nous l'avons fait n° 16, que l'on a, généralement, quel que soit i,

$$Cn.\frac{d_{,}\delta_{i}V}{dg}.dt = C.d'.\delta_{i}V.$$

L'équation précédente, en vertu de cette relation, donnera donc, en l'intégrant,

$$K = \left(\delta_{1}k.\delta_{i}k + \delta_{2}k.\delta_{i-1}k\ldots + \tfrac{1}{2}.\delta^{2}{}_{\frac{i+1}{2}}\right)k.$$

On voit que tous les termes du second membre sont de l'ordre $i+1$, que par conséquent la valeur de K n'augmente pas par l'intégration, et qu'elle reste toujours du même ordre que sa différentielle.

Concluons donc que l'axe de rotation de la Terre coïncidera toujours, à très peu près, avec son troisième axe principal, et que les pôles et l'équateur répondront, dans tous les temps, aux mêmes points de sa surface.

18. Considérons maintenant la vitesse de rotation de la Terre; si l'on nomme ρ cette vitesse, $\int\rho dt$ sera le nombre de degrés que décrit dans le temps t l'un quelconque des méridiens du sphéroïde terrestre; il en résulte que si ρ contenait un terme proportionnel au temps t, l'intégrale $\int\rho dt$ en renfermerait un croissant comme le carré du temps, et la longueur du jour en serait à la longue sensiblement altérée. Il est donc extrêmement important d'examiner, avec le plus grand soin, la valeur de $d\rho$, et de démontrer qu'elle ne renferme aucune inégalité séculaire susceptible de s'abaisser au premier ordre, par la double

intégration que subit cette quantité dans l'expression $\int dt \int d\rho$.

On a, par ce qui précède,

$$\rho = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}.$$

Nous venons de voir que p et q n'auront jamais de valeurs appréciables; la vitesse angulaire de rotation de la Terre sera donc toujours, à très peu près, égale à r, et si elle subit quelques altérations, elles ne proviendront que des variations auxquelles cette quantité peut être assujettie. Nous allons donc examiner quelles sont les inégalités que doit contenir l'expression de r.

Reprenons, pour cela, l'équation

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h.$$

Si l'on différencie cette équation en y faisant varier à la fois les variables et les constantes qu'elle renferme, on en tirera

$$Apdp + Bqdq + Crdr = \tfrac{1}{2}.dh. \qquad (p)$$

Si l'on néglige les quantités du second ordre par rapport aux forces perturbatrices, les différentielles dp, dq, dr étant déjà du premier ordre, on pourra, dans cette équation, supprimer les deux premiers termes, puisque p et q sont de l'ordre des forces perturbatrices; faire $r = n$ dans le troisième, et substituer pour dh sa valeur donnée par la formule (l). On aura ainsi

$$dr = \frac{1}{Cn}.d'.V, \qquad (q)$$

et dans le second membre, il faudra mettre $nt+\varepsilon$ à la place de φ, et regarder ψ et θ comme des constantes. Si l'on suppose donc la fonction V développée en série de sinus et de cosinus des multiples de l'angle φ ou de l'angle $nt+\varepsilon$, les termes du développement qui ne le renfermeront pas disparaîtront par la différenciation dans $\frac{\delta V}{ndt}$: la valeur dr ne contiendra donc que des termes périodiques dépendans de l'angle $nt+\varepsilon$, et par conséquent l'expression de r ne renfermera que des inégalités journalières qui resteront toujours insensibles et de l'ordre des forces perturbatrices.

19. Voyons maintenant quelles sont les inégalités qui peuvent résulter, dans l'expression de la vitesse r, de la considération des quantités dépendantes du carré des forces perturbatrices. De l'équation (p) on tire

$$Crdr = \tfrac{1}{2}.dh - \tfrac{1}{2}.d.(Ap^2 + Bq^2).$$

Si l'on substitue dans cette équation $n+\delta r$ à la place de r, δr étant une quantité du premier ordre déterminée par l'intégration de l'équation (q), on aura

$$dr = -\frac{1}{C^2 n^3}.d'V.\int d'V + \frac{1}{2Cn}.dh - \frac{d.(Ap^2 + Bq^2)}{2Cn}.$$

Examinons successivement les différentes inégalités que peuvent renfermer chacun des termes de la valeur de dr, en rejetant toutes celles qui dépendront de l'angle $nt+\varepsilon$, puisque nous sommes assurés d'avance qu'elles ne peuvent devenir sensibles.

Pour que l'angle $nt+\varepsilon$ puisse disparaître dans le premier terme de cette valeur, il faut combiner ensemble les termes de ses deux facteurs qui renferment le même multiple de cet angle. Or, si dans l'expression de la fonction V développée en série de cosinus d'angles proportionnels à φ, on considère deux termes dépendans du même multiple $i\varphi$, on aura

$$V = H.\cos(i\varphi+ft+g) + H'.\cos(i\varphi+f't+g'),$$

H, H', i, f, f', g, g' étant des constantes arbitraires dont les deux premières sont de l'ordre des forces perturbatrices. Si l'on substitue $nt+\varepsilon$ à la place de φ, on aura

$$d'V = -indt.H.\sin(int+i\varepsilon+ft+g) - indt.H'.\sin(int+i\varepsilon+f't+g'),$$

$$\int d'V = \frac{in}{in+f}.H.\cos(int+i\varepsilon+ft+g) + \frac{in}{in+f'}.H'.\cos(int+i\varepsilon+f't+g'$$

Si l'on combine ensemble ces deux expressions, on aura

$$dV'.\int dV' = -\frac{HH'.i^2n^2.(f'-f).dt}{(in+f).(in+f')}.\sin[(f'-f)t+g'-g],$$

en rejetant tous les termes dépendans de l'angle $2nt+2\varepsilon$ dont la période serait à peu près d'un demi-jour.

Les deux termes que nous avons considérés dans V produiront donc, dans la valeur de dr, le terme

$$dr = \frac{-HH'.i^2(f'-f).dt}{2C^2n.(in+f).(in+f')}.\sin[(f'-f).t+g'-g],$$

qui n'est pas susceptible de s'abaisser au premier

ordre, dans la valeur de r; car en l'intégrant, on a

$$r = -\frac{HH'.i^2}{2C^2n.(in+f).(in+f')}.\cos.[(f'-f)t+g'-g],$$

quantité du second ordre, puisque H et H' sont du premier.

Le premier terme de la valeur de dr ne produit donc, dans la vitesse r, aucune inégalité du premier ordre indépendante de l'angle $nt+\varepsilon$.

Nous avons fait voir, n° 11, que tous les termes de la valeur de dh pouvaient être mis sous cette forme :

$$d'.(M.\int Ndt - N.\int Mdt).$$

Soit $H\cos(int+i\varepsilon+ft+g)$ un terme quelconque du développement de M, et soit $H'\cos(int+i\varepsilon+f't+g')$, le terme du développement de N qui contient le même multiple de l'angle $nt+\varepsilon$. On aura, en vertu de ces deux termes seulement,

$$d'.(M\int Ndt - N\int Mdt) = \frac{HH'i.(f'-f).ndt}{2.(in+f).(in+f')}.\cos.[(f'-f)t+g'-g$$

en rejetant l'inégalité périodique dépendante de l'angle $2int+2i\varepsilon$.

Il en résultera, dans la valeur de dr, le terme

$$dr = \frac{HH'i.(f'-f).dt}{2C.(in+f).(in+f')}.\cos[(f'-f)t+g'-g],$$

et en intégrant, on aura

$$r = \frac{HH'i}{2C.(in+f).(in+f')}.\sin[(f'-f)t+g'-g],$$

quantité du même ordre que le produit HH'.

Enfin, le dernier terme de la valeur de dr étant une différentielle exacte, on aura, en l'intégrant,

$$r = -\frac{Ap^2+Bq^2}{2Cn},$$

quantité du second ordre, puisque p et q sont du premier.

20. On peut conclure de ce qui précède, que si l'on néglige les quantités du second ordre, par rapport aux forces perturbatrices, l'expression de r ne contient que des inégalités périodiques dépendantes de l'angle $nt+\varepsilon$ et de ses multiples: de sorte que si sa valeur rigoureuse renferme des termes multipliés par les sinus ou les cosinus d'angles croissant avec une grande lenteur, leurs coefficiens sont au moins du second ordre. La vitesse de rotation de la Terre n'éprouvera donc, dans la suite des temps, que des variations du même ordre, et l'on pourra toujours regarder son mouvement comme uniforme. En effet, la vitesse de rotation de la Terre autour de son axe instantané étant, n° 1, $\sqrt{p^2+q^2+r^2}$, l'intégale $\sqrt{p^2+q^2+r^2}.dt$ exprimera le nombre de degrés décrits par la Terre dans un temps quelconque t; et si l'on développe le radical suivant les puissances de p et q, on aura

$$\int\sqrt{p^2+q^2+r^2}.dt = \int rdt + \tfrac{1}{2}.\int\frac{p^2}{r}.dt + \tfrac{1}{2}.\int\frac{q^2}{r}.dt + \text{etc.}$$

Or, les inégalités séculaires que renferme r étant toutes du second ordre, il s'ensuit qu'elles ne peuvent s'abaisser qu'au premier dans la valeur de l'intégrale $\int r dt$. De même, puisque les inégalités que contiennent p et q sont toutes de l'ordre des forces perturbatrices, comme nous l'avons démontré n° 16, si $\frac{p^2}{r}$ et $\frac{q^2}{r}$ renferment des inégalités séculaires, elles sont du second ordre et ne pourront s'abaisser qu'au premier dans les intégrales $\int \frac{p^2}{r}.dt$, $\int \frac{q^2}{r}.dt$.

Les inégalités séculaires dont peut être affecté le mouvement de rotation de la Terre sont donc toutes de l'ordre des forces perturbatrices; on peut, par conséquent, en faire abstraction sans erreur sensible, et considérer ce mouvement comme parfaitement uniforme.

21. Concluons donc, enfin, que l'action du Soleil et de la Lune sur le sphéroïde terrestre ne produira jamais dans la position des pôles à sa surface, aucun déplacement appréciable, ni aucune variation sensible dans la vitesse et dans l'uniformité de son mouvement diurne de rotation; résultats importans qui assurent à jamais la stabilité des latitudes terrestres et l'invariabilité du jour sidéral.

On verra, dans le chapitre suivant, que ces mêmes astres, qui sont impuissans pour produire aucun dérangement dans la position de l'axe terrestre dans l'intérieur du globe, font varier au contraire, d'une manière très sensible, sa position dans l'espace, en sorte qu'il ne correspond pas, dans tous les siècles, aux mêmes points du ciel; d'où résultent, comme

nous l'avons dit, les phénomènes de la nutation et de la précession des équinoxes. On peut se rendre raison de cette différence, en remarquant que les oscillations de l'axe instantané de rotation, par rapport au troisième axe principal de la Terre, dépendent simplement des quantités p et q, tandis que les mouvemens de ce dernier axe, par rapport aux étoiles, dépendent des angles θ et ψ qui résultent, comme on le voit par les équations (a), n° 1, d'une double intégration des valeurs différentielles de p et q. On conçoit donc comment ces quantités, d'abord insensibles, peuvent ensuite devenir considérables par les très petits diviseurs que l'intégration leur fait acquérir.

CHAPITRE V.

Mouvemens de l'axe de rotation de la Terre dans l'espace, ou nutation de l'axe terrestre et précession des équinoxes.

22. La position, par rapport au plan principal de projection, de l'axe de rotation de la Terre ou du plan qui lui est perpendiculaire, et qu'on nomme l'*équateur*, dépend des deux angles $\theta_{,}$ et $\psi_{,}$, dont l'un détermine l'inclinaison de l'équateur sur le plan de projection qui serait invariable sans l'action des forces perturbatrices, et l'autre, la longitude de son nœud, comptée sur ce plan, à partir d'une ligne fixe; l'angle $\varphi_{,}$ détermine la longitude du même nœud, comptée sur l'équateur. Lorsque les valeurs des angles $\theta_{,}$, $\psi_{,}$, $\varphi_{,}$ sont connues, on détermine celles des angles analogues θ, ψ, φ, qui se rapportent à un plan fixe quelconque, au moyen des trois équations suivantes :

$$\left.\begin{aligned}
&\cos\theta = \cos\gamma\cos\theta_{,} - \sin\gamma\ \sin\theta_{,}\ \cos\psi_{,},\\
&\sin(\psi - \alpha) = \frac{\sin\theta_{,}\ \sin\psi_{,}}{\sin\theta},\\
&\sin(\varphi_{,} - \varphi) = \frac{\sin\gamma\ \sin\psi}{\sin\theta}.
\end{aligned}\right\}(h)$$

Pour déterminer les angles $\theta_{,}$ et $\varphi_{,}$, nous avons les deux équations

$$\sin\theta_{,}\cos\varphi_{,} = -\frac{Bq}{k}, \quad \sin\theta_{,}\sin\varphi_{,} = -\frac{Ap}{k},$$

d'où l'on tire

$$\sin\theta_{,} = \frac{\sqrt{A^2p^2 + B^2q^2}}{k}.$$

L'angle $\theta_{,}$ est du même ordre que les déplacemens des pôles à la surface de la Terre, et si l'on fait abstraction des forces perturbatrices, on aura $\theta_{,} = 0$, et les trois équations (h) donneront

$$\theta = \gamma, \quad \psi = \alpha, \quad \varphi = \varphi_{,} - \psi_{,}.$$

Ainsi donc, sans l'action des forces perturbatrices, l'inclinaison θ de l'équateur sur le plan fixe serait constante, et la longitude ψ de son nœud ne changerait pas; mais l'attraction du Soleil et de la Lune sur le sphéroïde terrestre fait varier d'une manière très lente les angles θ et ψ, et ce sont ces variations qui constituent le phénomène de la nutation de l'axe terrestre et de la précession des équinoxes.

Dans les recherches qui ont pour objet la détermination des mouvemens de l'axe de rotation de la Terre, on a coutume de négliger les carrés et les puissances supérieures des forces perturbatrices; il suffit, dans ce cas, de conserver dans les valeurs de θ et de ψ les termes dépendans de la première puissance de ces forces. Or, puisque $\theta_{,}$ est du premier ordre, on aura d'abord $\cos\theta_{,} = 1$, et ensuite, en

vertu des équations (o), n° 35, livre I[er],

$$\sin\theta_{,}\ \sin\psi_{,} = \sin\theta_{,}\ \sin(\varphi_{,}-\varphi) = \frac{Bq\sin\varphi}{k} - \frac{Ap\cos\varphi}{k},$$
$$\sin\theta_{,}\ \cos\psi_{,} = \sin\theta_{,}\ \cos(\varphi_{,}-\varphi) = -\frac{Bq\cos\varphi}{k} - \frac{Ap\sin\varphi}{k}.$$

En substituant ces valeurs dans les deux premières équations (h), on aura

$$\cos\theta = \cos\gamma + \frac{\sin\gamma}{k}.(Bq\cos\varphi + Ap\sin\varphi),$$
$$\sin(\psi - \alpha) = \frac{Bq\sin\varphi - Ap\cos\varphi}{k\sin\theta}.$$

La première de ces expressions, en négligeant les quantités du second ordre, peut s'écrire ainsi,

$$\cos\theta = \cos\left(\gamma - \frac{Bq\cos\varphi + Ap\sin\varphi}{k}\right);$$

on aura donc, aux quantités près de cet ordre,

$$\theta = \gamma - \frac{Bq\cos\varphi + Ap\sin\varphi}{k},$$
$$\psi = \alpha + \frac{Bq\sin\varphi - Ap\cos\varphi}{k\sin\theta}.$$

Nous avons vu, n° 15, que lorsqu'on néglige le carré des forces perturbatrices, on a

$$\frac{dV}{d\alpha} = \frac{dV}{d\psi},\quad \frac{dV}{d\gamma} = \frac{dV}{d\theta},\quad \frac{dV}{dg} = \frac{dV}{d\varphi}.$$

Que l'on substitue ces valeurs, et qu'on fasse de plus $k = Cn$ dans les deux dernières formules (Q) du n° 9,

on aura

$$dy = \frac{\cos\theta . dt}{Cn . \sin\theta} . \frac{dV}{d\varphi} + \frac{dt}{Cn . \sin\theta} . \frac{dV}{d\psi},$$

$$dx = \frac{dt}{Cn . \sin\theta} . \frac{dV}{d\theta},$$

formules qui ont sur celles du numéro cité, l'avantage d'employer la quantité V sous la forme où elle est donnée immédiatement, c'est-à-dire en fonction des variables φ, ψ, θ.

Différencions maintenant les expressions précédentes de $\theta_{,}$ et de $\psi_{,}$, substituons pour dy et dx leurs valeurs, et faisons $k = Cn$ dans les termes qui sont du premier ordre par rapport aux forces perturbatrices; nous aurons

$$\left.\begin{aligned} d\vartheta &= \frac{\cos\theta . dt}{Cn . \sin\theta} . \frac{dV}{d\varphi} + \frac{dt}{Cn . \sin\theta} . \frac{dV}{d\psi} \\ &\quad - \frac{d . (Ap \sin\varphi + Bq \cos\varphi)}{Cn} \\ d\psi &= - \frac{dt}{Cn . \sin\theta} . \frac{dV}{d\vartheta} - \frac{d . (Ap \cos\varphi - Bq \sin\varphi)}{Cn . \sin\theta} . \end{aligned}\right\} (l).$$

23. Ces formules serviront à déterminer les valeurs des angles θ et ψ qui fixent la position de l'équateur terrestre, par rapport à un plan fixe quelconque. Elles s'appliquent également à tous les corps célestes, et l'on en peut faire usage dans la théorie de la Lune. On voit qu'elles dérivent naturellement des formules du mouvement de rotation qui n'est troublé par l'action d'aucune force étrangère, en supposant variables les constantes que ces formules renferment, et en déterminant leurs variations conformément aux

principes généraux de la variation des constantes arbitraires. On peut d'ailleurs déduire fort simplement les équations (l) des équations différentielles (C) du mouvement troublé. En effet, si l'on multiplie la première par sin φ, et qu'on l'ajoute à la seconde multipliée par cos φ, qu'on multiplie ensuite les mêmes équations, la première par cos φ, la seconde par sin φ, et qu'on les retranche l'une de l'autre, on aura les deux équations suivantes :

$$\mathrm{A}dp \sin\varphi + \mathrm{B}dq \cos\varphi + (\mathrm{A}p\cos\varphi - \mathrm{B}q\sin\varphi).rdt + \mathrm{C}r.(\sin\varphi qdt - \cos\varphi pdt)$$
$$= \frac{\cos\theta.dt}{\sin\theta}\cdot\frac{d\mathrm{V}}{d\varphi} + \frac{dt}{\sin\theta}\cdot\frac{d\mathrm{V}}{d\psi},$$
$$\mathrm{A}dp\cos\varphi - \mathrm{B}dq\sin\varphi - (\mathrm{A}p\sin\varphi + \mathrm{B}q\cos\varphi).rdt + \mathrm{C}r.(\cos\varphi qdt + \sin\varphi pdt)$$
$$= -\frac{dt}{\sin\theta}\cdot\frac{d\mathrm{V}}{d\theta}.$$

Si l'on néglige les carrés des forces perturbatrices, on peut supposer $r = n$ et $rdt = d\varphi$ dans ces équations, en observant, de plus, qu'en vertu des formules (a), n° 1, on a

$$\sin\varphi.qdt - \cos\varphi.pdt = d\theta,$$
$$\cos\varphi.qdt + \sin\varphi.pdt = \sin\theta.d\psi.$$

On voit qu'elles sont identiques avec les équations (l), auxquelles nous sommes parvenus par une analyse moins directe, mais qui nous a servi à démontrer l'invariabilité des pôles à la surface de la Terre, et qui nous sera encore utile pour réduire, dans ce cas, ces formules à une forme plus simple..

24. En effet, tous les termes des valeurs de $d\theta$ et $d\psi$ sont insensibles en eux-mêmes, puisqu'ils sont de l'ordre

des forces perturbatrices; mais il se peut que quelques-uns d'entre eux deviennent sensibles dans les valeurs de θ et ψ, soit parce qu'ils s'y trouveront multipliés par le temps t hors des signes sinus et cosinus, soit à cause des petits diviseurs que l'intégration leur fera acquérir. C'est donc à ces termes seuls qu'il faut avoir égard, et l'on peut rejeter tous les autres des valeurs de $d\theta$ et de $d\psi$. Or, il est évident que l'on doit supprimer d'abord la partie de ces valeurs qui est une différence exacte, parce que les termes qui la composent sont encore après l'intégration de l'ordre des quantités p et q, et par conséquent insensibles. Si l'on substitue ensuite, dans la fonction V, qui est du premier ordre, à la place de φ, sa valeur $nt+\varepsilon$, indépendante des forces perturbatrices, il faudra rejeter des valeurs de $d\theta$ et de $d\psi$ tous les termes qui dépendront des sinus et des cosinus de cet angle, puisqu'il n'en résulterait dans θ et ψ que des inégalités dépendantes du mouvement diurne de la Terre, et qui, par conséquent, seront toujours inappréciables. Supposons donc qu'on ait développé la fonction V en une série de sinus et de cosinus de l'angle φ et de ses multiples; soit F le premier terme du développement, ou la partie indépendante de l'angle φ, on pourra substituer F à la place de V dans les expressions de $d\theta$ et de $d\psi$, ce qui les réduit, en supprimant en outre les différentielles exactes, à

$$\left.\begin{aligned} d\theta &= \frac{dt}{Cn.\sin\theta}\cdot\frac{dF}{d\psi} \\ d\psi &= -\frac{dt}{Cn.\sin\theta}\cdot\frac{dF}{d\theta} \end{aligned}\right\} (m).$$

Ces formules, les plus simples que l'on puisse employer pour déterminer la nutation de l'axe terrestre et la précession des équinoxes, sont dues à M. Poisson. Elles dérivent directement, comme on voit, de la discussion des formules (P) du n° 7, de sorte que les lois des mouvemens de l'axe de la Terre, soit dans l'intérieur du globe, soit par rapport aux étoiles, sont toutes contenues dans ces formules.

25. Pour développer les équations (m), reprenons la valeur de V du n° 1, nous aurons

$$V = S.\frac{Ldm}{\sqrt{[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]}},$$

x', y', z' étant les coordonnées de l'astre L relatives aux trois axes principaux qui se croisent au centre de gravité de la Terre, x, y, z les coordonnées de l'élément dm rapportées aux mêmes axes; enfin, le signe intégral S étant relatif à la molécule dm et à ses coordonnées, et devant s'étendre à la masse entière de la Terre.

Si dans cette expression on fait, pour abréger,

$$x'^2+y'^2+z'^2 = r'^2, \quad x^2+y^2+z^2 = r^2,$$

on aura

$$V = S.\frac{Ldm}{\sqrt{[r'^2-2.(xx'+yy'+zz')+r^2]}}.$$

Les distances des centres des forces perturbatrices au centre de la Terre étant fort grandes, relativement aux dimensions de cette planète, il en résulte qu'on peut réduire la fonction V en une série très conver-

gente, en la développant suivant les puissances descendantes de r'. Si l'on observe en outre que les six intégrales Sxdm, Sydm, Szdm, S$xydm$, S$xzdm$, S$yzdm$ sont nulles par les propriétés du centre de gravité et des axes principaux, on aura, de cette manière,

$$V = \frac{L}{r'}.S.dm - \frac{1}{2}.\frac{L}{r'^3}.S.r^2dm$$
$$+ \frac{3L}{2r'^5}.(x'^2.S.x^2dm + y'^2.S.y^2dm + z'^2.S.z^2dm).$$

Nous omettons, comme on le fait ordinairement, les termes de ce développement qui dépendent du produit de trois ou d'un plus grand nombre de dimensions en x, y, z, lesquels termes sont du même ordre que le cube et les puissances supérieures du rapport $\frac{r}{r'}$, c'est-à-dire de la parallaxe de l'astre L : de sorte que, relativement aux puissances de cette parallaxe, l'approximation suivante est bornée au carré inclusivement.

Nous avons désigné par A, B, C les trois momens d'inertie principaux du sphéroïde terrestre respectivement relatifs aux axes des x, des y et des z; on aura donc

$$S.(y^2+z^2).dm = A,\quad S.(x^2+z^2).dm = B,\quad S.(x^2+y^2).dm = C,$$

d'où l'on tire

$$S\,x^2dm = \frac{B+C-A}{2},\quad S.y^2dm = \frac{A+C-B}{2},$$
$$S.z^2dm = \frac{A+B-C}{2}.$$

La fonction V deviendra donc, en y substituant ces valeurs,

$$V = \frac{mL'}{r'} - \frac{L'}{4r'^3}.(A+B+C)$$
$$+ \frac{3L'}{4r'^5}.[x'^2.(B+C-A)+y'^2.(A+C-B)+z'^2.(A+B-C)].$$

Pour introduire, dans cette expression, les angles φ, ψ, θ, il faut transformer les coordonnées x', y', z' de l'astre L, en trois autres x, y, z relatives à des axes fixes. Nous prendrons, pour plan fixe des x, y, le plan de l'écliptique à une époque déterminée; l'angle θ sera, par conséquent, l'inclinaison variable de l'équateur sur l'écliptique, l'angle ψ la longitude de l'intersection de ces deux plans, ou de la ligne mobile des équinoxes, et φ l'angle compris entre cette intersection et l'axe principal des x; on aura, par les formules du n° 2,

$$x' = (x\cos\psi - y\sin\psi).\cos\varphi + [(x\sin\psi + y\cos\psi)\cos\theta - z\sin\theta].\sin\varphi,$$
$$y' = (y\sin\psi - x\cos\psi).\sin\varphi + [(x\sin\psi + y\cos\psi)\cos\theta - z\sin\theta].\cos\varphi,$$
$$z' = (x\sin\psi + y\cos\psi).\sin\theta + z\cos\theta.$$

Avant de substituer ces valeurs dans l'expression de V, remarquons que le rayon vecteur r' de l'astre L doit être indépendant des angles φ, ψ, θ: les termes qui ne contiendront que ce rayon vecteur disparaîtront donc dans les valeurs des différences partielles de la fonction V relatives à ces angles; on peut donc les supprimer d'avance et donner à l'expression de V cette forme

$$V = -\frac{3L}{2r'^5}.(Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2).$$

Si l'on élève au carré les valeurs de x', y', z', et qu'on les substitue dans cette équation, en faisant, pour abréger,

$$X' = X \cos\psi - Y \sin\psi, \qquad Y' = X \sin\psi + Y \cos\psi,$$

et en observant que la relation $x'^2 + y'^2 + z'^2 = r'^2$ donne

$$X'^2 + (Y' \cos\theta - Z \sin\theta)^2 = r'^2 - (Y' \sin\theta + Z \cos\theta)^2,$$

on aura

$$V = -\frac{3L}{4r'^5}.(A-B).\{[X'^2 - (Y'\cos\theta - Z\sin\theta)^2].\cos 2\varphi + 2X'.(Y'\cos\theta - Z\sin\theta).\sin 2\varphi\}$$
$$+ \frac{3L}{4r'^5}.(A+B-2C).(Y'\sin\theta + Z\cos\theta)^2.$$

Si l'on rejette les termes dépendans de l'angle φ, la fonction V se change dans la fonction que nous avons désignée par F; on aura donc simplement

$$F = \frac{3L}{4r'^5}.(A+B-2C).(Y'\sin\theta + Z\cos\theta)^2.$$

En différenciant cette expression, on formera les valeurs des quantités $\frac{dF}{d\theta}$ et $\frac{dF}{d\psi}$ qui entrent dans les formules (m); mais pour rendre possible l'intégration de ces formules, il sera nécessaire d'exprimer les coordonnées X, Y, Z, de l'astre L, en fonction du temps t.

Pour cela, nommons γ l'inclinaison du plan de l'orbite que décrit l'astre L dans son mouvement autour de la Terre sur le plan des XY ou sur l'écliptique fixe; soient de plus α la longitude de son nœud et v' la longitude de son rayon vecteur comptées sur le même plan à partir de l'axe des x; en désignant par s' la latitude, on aura

$$\text{x}=r'.\cos v'.\cos s',\quad \text{y}=r'.\sin v'.\cos s',\quad \text{z}=r'.\sin s'.$$

On a d'ailleurs $\tang s'=\tang\gamma.\sin(v'-\alpha)$; en observant donc que γ est généralement un très petit angle dont on peut négliger les puissances supérieures à la seconde, on trouvera

$$\text{x}=r'\cos v'.\sqrt{1-\gamma^2.\sin^2(v'-\alpha)},\ \text{y}=r'\sin v'.\sqrt{1-\gamma^2.\sin^2(v'-\alpha)},\ \text{z}=r.\gamma.\sin(v'-$$

on tire de là

$$\text{x}'=r'\cos(v'+\psi).\sqrt{1-\gamma^2.\sin^2(v'-\alpha)},\quad \text{y}'=r\sin(v'+\psi).\sqrt{1-\gamma^2.\sin^2(v'-\alpha)}$$

et au moyen de ces valeurs, on trouve

$$\left(\frac{\text{y}'}{r'}.\sin\theta+\frac{\text{z}}{r'}.\cos\theta\right)^2=\sin^2\theta.\sin^2(v'+\psi)+2\gamma.\sin\theta.\cos\theta.\sin(v'+\psi).\sin(v'-$$
$$+\gamma^2.\sin^2(v'-\alpha).[\cos^2\theta-\sin^2\theta.\sin^2(v'+\psi)].$$

Si l'on substitue cette valeur dans l'expression de F, qu'on remplace ensuite r' et v' par leurs valeurs relatives au mouvement elliptique de l'astre L, et développées en séries de sinus et de cosinus des multiples de son moyen mouvement mt, il sera facile de réduire en séries semblables la valeur de F, et par suite celles de $\frac{dF}{d\theta}$ et de $\frac{dF}{d\psi}$; les expressions différentielles de θ et

ψ se trouveront donc développées en une suite de termes dont chacun sera intégrable séparément.

Soient e l'excentricité de l'orbite de L, et a sa moyenne distance à la Terre; désignons par ε et ϖ les longitudes de l'époque et du périhélie, comptées de la même origine que ψ; on aura, par les formules du mouvement elliptique, n° 25, livre II,

$$\frac{r'}{a} = 1 + \tfrac{1}{2}.e^2 - e.\cos(mt + \varepsilon - \varpi) - \tfrac{1}{2}e^2.\cos 2(mt + \varepsilon - \varpi) + \text{etc.},$$

$$v' = mt + \varepsilon + 2e.\sin(mt + \varepsilon - \varpi) + \tfrac{5}{4}e^2.\sin 2(mt + \varepsilon - \varpi) \ldots\ldots$$
$$- \tfrac{1}{4}.\gamma^2.\sin 2(mt + \varepsilon - \varpi) + \text{etc.}$$

L'excentricité de l'orbite de L et son inclinaison sur l'écliptique fixe étant toujours peu considérables, e et γ sont de très petites quantités; nous négligerons en conséquence le carré de la première et le cube de la seconde, ainsi que leurs produits de trois dimensions. Nous observerons, de plus, que les termes de la valeur de V qui dépendent du mouvement de l'astre L dans son orbite, ne produisant dans les valeurs de θ et de ψ que des inégalités périodiques qui sont nécessairement très petites, comme les observations l'indiquent, on peut n'avoir égard qu'aux plus considérables d'entre elles; en conséquence, nous ne considérerons parmi ces termes que ceux qui sont indépendans de l'excentricité e et de l'inclinaison γ. Cela posé, il est facile de se convaincre qu'il suffira de faire dans l'expression de V

$$r' = a \quad \text{et} \quad v' = mt + \varepsilon;$$

on trouvera ainsi

$$F=\frac{3L}{8a^3}.(A+B-2C)\{\sin^2\theta+2\gamma.\sin\theta.\cos\theta.\cos(\alpha+\psi)+\gamma^2.[\cos^2\theta-\sin^2\theta.\cos^2(\alpha+$$
$$-\sin^2\theta.\cos 2(mt+\iota+\psi)\},$$

d'où en différenciant, on tire

$$\frac{dF}{d\theta}=\frac{3L}{4a^3}.(A+B-2C).\Big\{\sin\theta.\cos\theta.\{1-\gamma^2.[1+\cos^2(\alpha+\psi)]-\cos 2(mt+\iota+\psi)\}$$
$$+(\cos^2\theta-\sin^2\theta).\gamma\cos(\alpha+\psi)\Big\},$$
$$\frac{dF}{d\psi}=-\frac{3L}{4a^3}.(A+B-2C).\{\sin\theta.[\cos\theta.\gamma.\sin(\alpha+\psi)-\sin\theta.\sin 2(mt+\iota+\psi)$$
$$-\tfrac{1}{2}.\sin\theta.\gamma^2.\sin 2(\alpha+\psi)\}.$$

Ces valeurs, substituées dans les équations (m), en négligeant dans une première approximation les termes périodiques et ceux qui dépendent du carré de γ, et en faisant, pour abréger, $\frac{L}{a^3}=m^2$, donneront

$$\left.\begin{array}{l} d\theta=\frac{3m^2dt}{4n}.\left(\frac{2C-A-B}{C}\right).\cos\theta.\gamma\sin(\alpha+\psi), \\ d\psi=\frac{3m^2dt}{4n}.\left(\frac{2C-A-B}{C}\right).\left[\cos\theta+\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\sin\theta}.\gamma\cos(\alpha+\psi)\right]. \end{array}\right\}($$

26. Considérons les quantités $\gamma\sin(\alpha+\psi)$, et $\gamma\cos(\alpha+\psi)$ qui entrent dans ces expressions. Elles représentent, comme il est facile de le voir, les produits de l'inclinaison de l'orbite de L sur l'écliptique fixe, par le sinus et le cosinus de la longitude de son nœud, comptée sur ce plan à partir de son intersection avec l'équateur, ou de la ligne mobile des équinoxes. Si l'on développe le premier de ces produits, on a

$$\gamma\sin(\alpha+\psi)=\gamma\sin\alpha.\cos\psi+\gamma\cos\alpha.\sin\psi.\ (o)$$

Dans cette valeur, $\gamma \sin \alpha$ et $\gamma \cos \alpha$ sont les produits de l'inclinaison de l'orbite de L sur l'écliptique fixe, par le sinus et le cosinus de la longitude de son nœud, comptée à partir d'une ligne fixe. Ces quantités ne sont pas constantes, elles sont sujettes à des variations séculaires qu'il n'est pas permis de négliger, parce qu'elles peuvent devenir très sensibles par l'intégration dans les valeurs de θ et de ψ. Or, nous avons vu, dans le n° 69 du livre II, que si l'on nomme γ l'inclinaison de l'orbe d'une planète quelconque L sur un plan fixe, et α la longitude de son nœud ascendant, comptée à partir d'une ligne fixe, le produit $\tang \gamma \sin \alpha$ est exprimé par un nombre fini de termes de la forme, $B \sin (bt + \epsilon)$ et le produit $\tang \gamma \cos \alpha$ par la même suite de termes dans lesquels on change le sinus en cosinus. Nous représenterons la première suite par $\Sigma . B \sin (bt + \epsilon)$, et la seconde par $\Sigma . B \cos (bt + \epsilon)$. En observant donc que l'inclinaison γ étant supposée très petite, on peut prendre cet angle pour sa tangente, on aura

$$\gamma \sin \alpha = \Sigma . B \sin (bt + \epsilon), \quad \gamma \cos \alpha = \Sigma . B \cos (bt + \epsilon).$$

Ces valeurs, substituées dans l'équation (o), donnent

$$\gamma \sin (\alpha + \psi) = \Sigma . B \sin (bt + \psi + \epsilon),$$

d'où l'on voit que pour avoir $\gamma \sin (\alpha + \psi)$, il suffit d'augmenter de la quantité ψ les angles des différens termes de l'expression de $\gamma \sin \alpha$, c'est-à-dire qu'il suffit de rapporter ces angles à la ligne mobile des équinoxes. Nous verrons que la valeur de ψ se compose d'un terme croissant comme le temps t, et d'une

suite d'inégalités à longue période du même ordre que la quantité B; on pourra donc, si dans les valeurs de θ et ψ on néglige les quantités très petites de l'ordre B^2, substituer à l'angle ψ, dans l'expression précédente, le moyen mouvement des équinoxes. La valeur de $\gamma\sin(\alpha+\psi)$ sera exprimée alors par un nombre fini de termes de la forme $B\sin(ct+\epsilon)$, qui ne différeront des termes de l'expression de $\sin\gamma\sin\alpha$, qu'en ce que les angles bt seront augmentés du moyen mouvement des équinoxes. On prouverait, de la même manière, que $\gamma\cos(\alpha+\psi)$ sera composé de la même suite de termes, dans lesquels on changera seulement le sinus en cosinus; d'où il suit qu'on aura généralement

$$\gamma\sin(\alpha+\psi)=\Sigma.B\sin(ct+\epsilon),$$
$$\gamma\cos(\alpha+\psi)=\Sigma.B\cos(ct+\epsilon).$$

Substituons ces valeurs dans les équations (n), elles deviennent

$$\left.\begin{aligned} d\theta &= \frac{3m^2dt}{4n}.\left(\frac{2C-A-B}{C}\right).\cos\theta.\Sigma.B\sin(ct+\epsilon), \\ d\psi &= \frac{3m^2dt}{4n}.\left(\frac{2C-A-B}{C}\right).\left[\cos\theta+\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\sin\theta}.\Sigma.B\cos(ct+\epsilon)\right]. \end{aligned}\right\}$$

27. On peut, dans la valeur de $d\theta$, regarder $\cos\theta$ comme constant, parce que les termes qui résulteraient de sa variation seraient des quantités de l'ordre B^2 que nous négligeons; on aura donc en intégrant

$$\theta=h'+\frac{3m^2}{4n}.\left(\frac{A+B-2C}{C}\right).\cos\theta.\Sigma.\frac{B}{c}\cos(ct+\epsilon),$$

h' étant une constante arbitraire. Pour la déterminer,

désignons par h l'inclinaison de l'équateur à l'écliptique fixe, lorsque t est égal à zéro, on aura, pour cet instant

$$h = h' + \frac{3m^2}{4n}\cdot\left(\frac{A+B-2C}{C}\right)\cdot\cos h\,.\,\Sigma\,.\,\frac{B}{c}\cos 6.$$

En faisant donc pour abréger,

$$l = \frac{3m^2}{4n}\cdot\left(\frac{2C-A-B}{C}\right)\cdot\cos h,$$

on aura, aux quantités près de l'ordre B^4,

$$\theta = h - \Sigma\,.\,\frac{Bl}{c}\,.\,[\cos(ct+6) - \cos 6]. \quad (1)$$

Passons à l'expression de $d\psi$. Il n'est plus permis ici de regarder comme constant l'angle θ qui entre dans cette différentielle, parce que ses variations peuvent devenir sensibles dans la valeur de ψ. On voit, en effet, qu'elles y produisent des termes qui sont du second ordre par rapport aux forces perturbatrices, mais seulement du premier par rapport à la quantité B. Si l'on n'a égard qu'à ces termes, et si l'on néglige, comme nous le faisons, les quantités de l'ordre B^2, c'est uniquement dans le premier terme de la valeur de $d\psi$ qu'il sera nécessaire de considérer la variation de l'angle θ. Nommons donc $\delta\theta$ cette variation déterminée par la première des formules (p), en sorte qu'on ait $\theta = h + \delta\theta$; en négligeant les quantités de l'ordre $\delta^2\theta$, on aura

$$\cos\theta = \cos h\,.\,(1 - \tang h\,.\,\delta\theta),$$

ou bien, en mettant pour $\delta\theta$ sa valeur,

$$\cos\theta = \cos.\left[1 + \text{tang}\, h.\Sigma.\frac{Bl}{c}.\cos(ct+6)\right].$$

Si dans le premier terme de l'expression de $d\psi$, on substitue cette valeur, et si l'on remplace par l la quantité que cette lettre représente, on trouvera

$$d\psi = \left[l + \Sigma.Bl.\cot h.\left(1 + \frac{l-c}{c}.\text{tang}^2 h\right).\cos(ct+6)\right].dt$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$\psi = lt + l' + \Sigma.\frac{Bl}{c}.\cot h.\left(1 + \frac{l-c}{c}.\text{tang}^2 h\right).\sin(ct+6),$$

l' étant une constante arbitraire. Nous prendrons pour origine de l'angle ψ et des autres longitudes comptées sur le plan de l'écliptique fixe, l'équinoxe du printemps, à l'époque d'où l'on compte le temps, en sorte que ψ sera nul en même temps que t; on aura ainsi

$$0 = l' + \Sigma.\frac{Bl}{c}.\cot h.\left(1 + \frac{l-c}{c}.\text{tang}^2 h\right).\sin 6,$$

et par conséquent

$$\psi = lt + \Sigma.\frac{Bl}{c}.\cot h.\left(1 + \frac{l-c}{c}.\text{tang}^2 h\right).[\sin(ct+6) - \sin 6].(\ $$

Ces valeurs de θ et de ψ serviront à déterminer les mouvemens de l'axe terrestre par rapport aux étoiles; jointes à la valeur $\varphi = nt + \varepsilon$, elles fournissent toutes les données nécessaires pour fixer à chaque

instant la position de la Terre autour de son centre de gravité.

28. Il est important de remarquer que l'on serait parvenu à des formules très différentes des précédentes, si l'on avait négligé de tenir compte, dans les valeurs de $d\theta$ et $d\psi$, des variations séculaires des quantités $\gamma \sin \alpha$ et $\gamma \cos \alpha$. En effet, il est aisé de voir que si l'on désigne par lt le moyen mouvement des équinoxes, en sorte qu'on ait

$$b + l = c,$$

les produits de la tangente de l'inclinaison du plan de l'orbite de l'astre L sur l'écliptique fixe, par le sinus ou le cosinus de la longitude de son nœud, comptée de l'équinoxe mobile, seront dans ce cas,

$$\gamma \sin(\alpha + \psi) = \Sigma . B \sin(lt + \mathsf{C}), \quad \gamma \cos(\alpha + \psi) = \Sigma . B \cos(lt + \mathsf{C}).$$

En substituant ces valeurs dans les équations (n) du n° 25, et en leur appliquant ensuite l'analyse précédente, on trouve

$$\left.\begin{aligned} \theta &= h - \Sigma . B[\cos(lt + \mathsf{C}) - \cos \mathsf{C}], \\ \psi &= lt + \Sigma . B \cot h [\sin(lt + \mathsf{C}) - \sin \mathsf{C}]. \end{aligned}\right\} (q)$$

Ces formules ont été données d'abord par Lagrange dans les Mémoires de Berlin pour l'année 1800, et on les retrouve dans plusieurs ouvrages d'Astronomie qui ont paru depuis ; on voit qu'elles dérivent naturellement des valeurs de θ et de ψ, n° 25, en supposant qu'on a égard, dans ces valeurs, à l'aplatissement de la Terre, en tant qu'il produit la précession

moyenne lt des équinoxes, mais qu'on peut négliger l'effet de cet aplatissement combiné avec le déplacement séculaire du plan de l'orbite de l'astre L. Or, cette hypothèse n'est pas suffisamment exacte, et l'on verra plus bas que les formules (q) ne peuvent servir que pendant un siècle au plus, à partir de l'époque d'où l'on compte le temps t, mais qu'au-delà elles donneraient des résultats fort différens des phénomènes observés.

29. Nous avons rapporté jusqu'ici les angles θ et ψ à un écliptique fixe; mais pour comparer la théorie aux observations, il faut avoir les valeurs de ces angles par rapport à l'écliptique mobile, puisque c'est en effet de ce plan que nous les observons. Supposons que l'astre L, dont nous avons considéré l'action sur le sphéroïde terrestre, soit le Soleil, et considérons le triangle formé sur la surface d'une sphère décrite du centre de gravité de la Terre avec un rayon arbitraire, par l'écliptique fixe, l'équateur et le plan mobile de l'orbe solaire, ou l'écliptique vraie. Si l'on désigne par θ' l'inclinaison de l'équateur à l'écliptique vraie, les trois angles de ce triangle seront θ, γ, $180° - \theta'$, et l'arc $\alpha + \psi$ sera le côté opposé à l'angle $180° - \theta'$; on aura donc, pour déterminer cet angle,

$$\cos\theta' = \cos\theta\cos\gamma - \sin\theta\sin\gamma\cos(\alpha + \psi).$$

Cette équation donne, aux quantités près de l'ordre γ, $\theta' = \theta$; si l'on néglige seulement les quantités de l'ordre γ^2, on a

$$\cos\theta' = \cos\theta - \sin\theta . \gamma\cos(\alpha + \psi),$$

d'où l'on tire, en substituant pour $\gamma\cos(\alpha + \psi)$, sa

valeur, et en négligeant toujours les quantités du second ordre,

$$\theta' = \theta + \Sigma . \mathrm{B} \cos (ct + 6). \qquad (3)$$

Désignons, dans le même triangle sphérique, par x, le côté opposé à l'angle γ, nous aurons

$$\sin x = \frac{\sin \gamma \; \sin (\alpha - \psi)}{\sin \theta'}. \qquad (r)$$

Nommons ψ' la distance de l'intersection de l'équateur et de l'écliptique vraie, projetée sur l'écliptique fixe, à l'origine invariable d'où l'on compte l'angle ψ sur ce dernier plan, et considérons le triangle sphérique rectangle dont x est l'hypoténuse, et dans lequel θ est l'angle adjacent au côté $\psi - \psi'$, nous aurons

$$\operatorname{tang} (\psi - \psi') = \cos \theta \operatorname{tang} x.$$

La supposition de $\gamma = 0$ donne $x = 0$, et par conséquent $\psi' = \psi$. Si l'on substitue pour $\operatorname{tang} x$ sa valeur tirée de l'équation (r), et qu'on néglige seulement les quantités de l'ordre γ^2, on trouvera

$$\operatorname{tang} (\psi - \psi') = \cot \theta . \gamma \sin (\alpha + \psi),$$

d'où l'on tire, en mettant pour $\gamma \sin (\alpha + \psi)$ sa valeur et négligeant les quantités du second ordre,

$$\psi' = \psi - \cot h \Sigma . \mathrm{B} \sin (ct + 6). \qquad (4)$$

Nous avons représenté par γ l'inclinaison de l'écliptique vraie sur l'écliptique fixe; par les équations (k), on a généralement

$$\gamma^2 = [\Sigma.\mathrm{B}\sin(ct+6)]^2 + [\Sigma.\mathrm{B}\cos(ct+6)]^2.$$

Prenons pour plan fixe celui de l'écliptique au commencement du temps t; γ sera nul pour cette époque, puisque alors l'écliptique vraie coïncide avec l'écliptique fixe; on aura donc

$$\Sigma.\mathrm{B}\sin 6 = 0, \quad \Sigma.\mathrm{B}\cos 6 = 0.$$

Cela posé, si dans les équations (3) et (4), on remplace θ et ψ par leurs valeurs données par les formules (1) et (2), on aura, pour déterminer θ' et ψ', les deux formules suivantes :

$$\left.\begin{aligned} \theta' &= h - \Sigma.\frac{\mathrm{B}(l-c)}{c}.[\cos(ct+6)-\cos 6], \\ \psi' &= lt+\Sigma.\frac{\mathrm{B}(l-c)}{c}.\cot h.\left(1+\frac{l}{c}.\operatorname{tang}^2 h\right)[\sin(ct+6)-\sin 6], \end{aligned}\right\}(\ $$

les constantes h et l ayant la même signification que dans le n° 27.

30. Ces formules sont celles que nous emploierons pour déterminer les variations d'obliquité de l'écliptique vraie, et la précession des équinoxes relatives à ce plan. Pour les comparer à celles qu'on obtiendrait en négligeant l'effet de l'aplatissement de la Terre combiné avec le déplacement séculaire de l'écliptique, substituons dans les équations (3) et (4) pour θ et ψ, leurs valeurs données par les équations (q), et nommons, comme précédemment, h l'obliquité de l'écliptique lorsque t est nul; nous aurons ainsi

$$\left.\begin{aligned}\theta' &= h + \Sigma . B[\cos(ct+\epsilon) - \cos(lt+\epsilon)],\\ \psi' &= lt - \Sigma . B \cot h[\sin(ct+\epsilon) - \sin(lt+\epsilon)].\end{aligned}\right\}(s)$$

Ces formules s'accordent assez bien avec les précédentes, lorsque le temps t, que l'on suppose exprimer un nombre d'années tropiques, n'excède pas cent; elles donnent également en effet, en les développant par rapport à t, et en négligeant les termes de l'ordre t^2, pour la variation de l'obliquité de l'écliptique,

$$\delta\theta' = t . \Sigma . (l - c) B \sin \epsilon;$$

mais ces formules diffèrent beaucoup lorsque le nombre t est de plusieurs mille, parce qu'il n'est plus permis alors de négliger les termes dépendans du carré du temps.

Si la Terre était sphérique, les actions des autres corps du système n'auraient aucune influence sur les mouvemens de son axe de rotation, puisque leur résultante passerait exactement dans ce cas par son centre de gravité. Les trois momens d'inertie principaux du sphéroïde terrestre seraient alors égaux entre eux; on aurait par conséquent $l = 0$, ce qui donne $c = b$, et les valeurs de θ' et ψ' se réduiraient aux suivantes :

$$\begin{aligned}\theta' &= h + \Sigma . B[\cos(bt+\epsilon) - \cos\epsilon],\\ \psi' &= -\Sigma . B \cot h[\sin(bt+\epsilon) - \sin\epsilon].\end{aligned}$$

Ces équations déterminent la variation de l'obliquité de l'écliptique et la précession des équinoxes qui auraient lieu par le seul effet du déplacement de l'orbe

solaire, résultant de l'action mutuelle des différens corps du système. En les comparant aux formules (5), on voit que l'action du Soleil et de la Lune sur le sphéroïde terrestre change considérablement les lois de ces deux phénomènes; mais cette différence ne devient sensible qu'après un grand nombre d'années. En effet, la valeur précédente de θ' donne, pour la variation de l'obliquité de l'écliptique, en négligeant les quantités de l'ordre t^2,

$$\delta\theta' = -t.\Sigma.b\mathrm{B}\sin\mathfrak{C}.$$

Cette valeur, en observant que l'on a $-b=l-c$, coïncide avec celle que nous avons tirée des formules (5) et (s). La variation séculaire de l'obliquité de l'écliptique est donc la même pour les temps voisins de l'époque, que la Terre soit supposée s'éloigner ou non de la figure sphérique; mais cette variation est fort différente dans les siècles suivans, et dans les suppositions les plus vraisemblables sur les masses des planètes, l'étendue entière de la variation de l'obliquité de l'écliptique est réduite par l'action du Soleil et de la Lune sur le sphéroïde terrestre, à peu près au quart de la valeur qu'elle aurait sans cette action.

31. Nous n'avons considéré jusqu'ici que l'influence du Soleil sur les déplacemens de l'équateur terrestre; considérons maintenant celle de la Lune. Il est clair, d'après l'analyse précédente, que l'action de la Lune ajoutera aux valeurs de θ et de ψ des termes semblables à ceux que produit l'action du Soleil; mais une circonstance particulière au mouvement de cet

astre contribuera à simplifier ces expressions. L'observation montre que l'inclinaison moyenne de l'orbe lunaire à l'écliptique vraie est à peu près invariable; il y a donc de l'avantage à introduire cet angle à la place de l'inclinaison sur l'écliptique fixe dans les formules (1), (2) et (5). Pour y parvenir, désignons par γ' l'inclinaison de l'orbite de la Lune sur l'écliptique fixe, et par α' la longitude de son nœud, comptée de la ligne fixe qui sert d'origine à l'angle ψ, en sorte que $\alpha' + \psi$ sera cette même longitude comptée de l'équinoxe mobile. Soit s la longitude de la Lune comptée de la même ligne fixe sur l'écliptique invariable. Il est aisé de voir que les latitudes, par rapport à l'écliptique fixe et à l'écliptique mobile, seront respectivement, aux quantités près du second ordre, $\text{tang}\ \gamma' \sin(s - \alpha')$ et $B' \sin(s - \alpha')$, en désignant par B' la tangente de l'inclinaison moyenne de l'orbe lunaire sur l'écliptique vraie ; mais si la Lune était en mouvement sur le plan même de cette écliptique, sa latitude au-dessus de l'écliptique fixe correspondante à la même longitude s, serait $\text{tang}\ \gamma \sin(s - \alpha)$. Cette dernière latitude est à très peu près égale à la différence des deux premières; on aura donc

$$\text{tang}\ \gamma \sin(s - \alpha) = \text{tang}\ \gamma' \sin(s - \alpha') - B' \sin(s - \alpha'),$$

d'où, en supposant successivement s égal à zéro, et s égal à un angle droit, et substituant les angles γ et γ' à la place de leurs tangentes, on tire

$$\gamma' \sin \alpha' = \gamma \sin \alpha + B' \sin \alpha',$$
$$\gamma' \cos \alpha' = \gamma \cos \alpha + B' \cos \alpha'.$$

Cela posé, les quantités $\gamma' \sin(\alpha' + \psi)$, et $\gamma' \cos(\alpha' + \psi)$ représentant les produits de l'inclinaison de l'orbe lunaire sur l'écliptique fixe multipliée par le sinus et le cosinus de la longitude de son nœud, comptée sur le même plan à partir de l'équinoxe mobile; on aura, en les développant,

$$\gamma' \sin(\alpha' + \psi) = \gamma' \sin\alpha' . \cos\psi + \gamma' \cos\alpha' . \sin\psi,$$
$$\gamma' \cos(\alpha' + \psi) = \gamma' \cos\alpha' . \cos\psi - \gamma' \sin\alpha' . \sin\psi.$$

Si l'on substitue, dans ces expressions, pour $\gamma' \sin\alpha'$ et pour $\gamma' \cos\alpha'$ leurs valeurs, on trouvera

$$\gamma' \sin(\alpha' + \psi) = \gamma \sin(\alpha + \psi) + B' \sin(\alpha' + \psi),$$
$$\gamma' \cos(\alpha' + \psi) = \gamma \cos(\alpha + \psi) + B' \cos(\alpha' + \psi).$$

Désignons par L' la masse de la Lune, et par a' sa moyenne distance à la Terre, et faisons $\frac{L'}{a'^3} = \lambda m^2$, en sorte que λ désigne le rapport de l'action de la Lune à celle du Soleil. Il est clair qu'il suffira, pour avoir égard à l'action de la Lune, de substituer λm^2 à la place de m^2, et les seconds membres des équations précédentes, à la place de $\gamma \sin(\alpha + \psi)$ et de $\gamma \cos(\alpha + \psi)$ dans les formules (n). Qu'on désigne par $c't + \varepsilon'$ la valeur moyenne de la longitude du nœud de l'orbite lunaire, comptée de l'équinoxe mobile, la seule à laquelle il soit nécessaire d'avoir égard, ce qui donne $\alpha' + \psi = c't + \varepsilon'$; qu'on intègre ensuite les équations résultantes, en remarquant qu'on peut, dans la partie relative aux déplacemens de l'orbe lunaire, regarder θ comme constant et égal à h; qu'on change de plus l en $(1 + \lambda)l$, ou,

comme l est arbitraire, qu'on suppose que cette constante représente désormais cette quantité, ce qui donne

$$l = \frac{3m^2.(1+\lambda)}{4n}.\left(\frac{2C-A-B}{C}\right).\cos h, \quad (6)$$

on aura, en vertu des actions combinées de la Terre et du Soleil,

$$\theta = h - \Sigma.\frac{Bl}{c}.[\cos(ct+\epsilon)-\cos\epsilon] - \frac{B'l\lambda}{c'(1+\lambda)}.\cos(c't+\epsilon'),$$

$$\theta' = h - \Sigma.\frac{B(l-c)}{c}.[\cos(ct+\epsilon)-\cos\epsilon] - \frac{B'l\lambda}{c'(1+\lambda)}.\cos(c't+\epsilon'),$$

$$\psi = lt + \Sigma.\frac{Bl}{c}.\cot h\left(1+\frac{l-c}{c}.\text{tang}^2 h\right)[\sin(ct+\epsilon)-\sin\epsilon]$$
$$+\frac{2B'l\lambda}{c'(1+\lambda)}.\cot 2h.\sin(c't+\epsilon'),$$

$$\psi' = lt + \Sigma.\frac{B(l-c)}{c}.\cot h.\left(1+\frac{l}{c}.\text{tang}^2 h\right)[\sin(ct+\epsilon)-\sin\epsilon]$$
$$+\frac{2B'l\lambda}{c'(1+\lambda)}.\cot 2h.\sin(c't+\epsilon').$$

Dans ces formules, h représente l'inclinaison moyenne de l'équateur à l'écliptique, ou l'obliquité apparente de l'écliptique à l'époque où l'on fait commencer le temps, et l le moyen mouvement des équinoxes à la même époque.

D'après le sens dans lequel est compté l'angle ψ, n° 1, on voit que le mouvement des équinoxes sera rétrograde, si cet angle croît avec le temps t; or, le premier terme de sa valeur surpasse tous les autres, et C étant le plus grand des trois momens d'inertie du sphéroïde terrestre, l est nécessairement une quantité positive; le mouvement des équinoxes est donc rétrograde à la fois sur l'écliptique fixe et sur l'écliptique vraie.

Telles sont les valeurs de θ, ψ, θ', ψ' qui résultent de l'action du Soleil et de la Lune sur le sphéroïde terrestre, et les formules précédentes sont celles qu'il faudra employer pour déterminer les déplacemens de son équateur. La première partie de ces formules donne la variation séculaire des angles θ, ψ, θ' et ψ'; leur dernier terme est périodique et dépend du mouvement des nœuds de l'orbe lunaire; sa période est d'environ dix-huit ans. C'est lui qui constitue spécialement ce balancement particulier de l'axe terrestre que Bradley a le premier découvert, et qu'il a nommé *sa nutation*.

32. Examinons l'influence du mouvement des équinoxes et des déplacemens de l'équateur sur la longueur de l'année tropique et sur la durée du jour moyen. L'espace de temps qui s'écoule entre les retours du Soleil au même équinoxe ou au même solstice, forme l'année tropique; l'intervalle compris entre deux de ces retours aux mêmes étoiles forme l'année sidérale. Si les équinoxes étaient fixes, l'année tropique serait égale à l'année sidérale; mais comme ils ont sur l'écliptique un mouvement rétrograde ou contraire au mouvement propre du Soleil, ils s'avancent au-devant de cet astre, et resserrent l'espace qu'il avait à parcourir pour accomplir sa révolution. On aura la durée de l'année tropique en retranchant de l'année sidérale l'arc parcouru pendant ce temps par l'équinoxe sur l'écliptique vraie réduit en temps, à raison de la circonférence entière pour une année. Soit donc T l'année sidérale, la longueur de l'année tropique sera

$$T.\left(1 - \frac{d\psi'}{dt.360^{\circ}}\right).$$

L'année sidérale est de $365^j,256384$; le moyen mouvement des équinoxes dans ce siècle est de $50'',3757$; l'année sidérale surpasse donc l'année tropique de $0^j,014197$. Mais comme le mouvement des équinoxes est variable, la longueur de l'année tropique change dans les différens siècles ; elle est maintenant d'environ $9''$ plus courte qu'au temps d'Hipparque.

On distingue en Astronomie trois espèces de jours : le jour sidéral, le jour solaire et le jour moyen. Le jour sidéral est l'intervalle de temps qui s'écoule entre les retours d'une même étoile à un méridien donné. Le jour solaire se mesure par les passages successifs du Soleil par le même plan. Si l'on imagine dans le plan de l'écliptique un Soleil fictif qui se meuve d'un mouvement uniforme et passe au périgée, et à l'apogée en même temps que le Soleil véritable; que l'on imagine ensuite dans le plan de l'équateur un troisième Soleil qui passe par l'équinoxe du printemps en même temps que le second, et qui se meuve uniformément, de manière que les distances angulaires de ces deux astres fictifs au même équinoxe soient constamment égales entre elles, l'intervalle de deux retours consécutifs de ce troisième Soleil au méridien sera ce qu'on appelle *le jour moyen*. Le mouvement de rotation de la Terre autour de son axe étant uniforme, n° 20, et le moyen mouvement du Soleil dans son orbite étant invariable, n° 61, liv. II, la durée du jour moyen serait constante, si l'obliquité

de l'écliptique était toujours la même et si le mouvement des équinoxes était uniforme : les variations auxquelles elle peut être assujettie ne dépendront donc que des variations séculaires de l'obliquité de l'écliptique et de la précession des équinoxes.

Pour les déterminer, considérons la marche du Soleil fictif que nous avons supposé en mouvement sur le plan de l'équateur. Soit v la vitesse dont cet astre est animé, s sa longitude comptée de l'intersection de l'équateur avec l'écliptique fixe. La position de cette ligne varie, et son mouvement rétrograde projeté sur le plan de l'équateur sera $d\psi.\cos\theta$ pendant l'instant dt; on aura donc, à la fin de cet instant,

$$ds = \text{v}.dt + d\psi.\cos\theta.$$

Nommons s' la distance du même Soleil à l'équinoxe réel, c'est-à-dire à l'intersection de l'équateur avec l'écliptique vraie; $s - s'$ sera l'arc compris sur l'équateur entre l'équinoxe réel et l'équinoxe relatif à l'écliptique fixe. Nous avons désigné par x ce même arc dans le n° 29; on aura donc, à très peu près,

$$s - s' = \frac{\Sigma.\text{B}.\sin(ct + 6)}{\sin\theta},$$

d'où, en différenciant et mettant pour ds sa valeur, on tire

$$\frac{ds'}{dt} = \text{v} + \frac{d\psi}{dt}.\cos\theta - \frac{\Sigma.\text{B}c.\cos(ct + 6)}{\sin\theta}.$$

Soit mt le mouvement angulaire du second Soleil, ou

de l'astre fictif qui se meut uniformément sur le plan de l'écliptique vraie ; la vitesse de ce Soleil, par rapport à une ligne fixe, sera m. L'équinoxe réel a, relativement à la même ligne, une vitesse rétrograde $\frac{d\psi'}{dt}$; la vitesse du second Soleil, par rapport à cet équinoxe, sera donc $m + \frac{d\psi'}{dt}$. Or, d'après la définition du temps moyen, il est clair que cette vitesse doit être égale à $\frac{ds'}{dt}$; on aura donc, pour déterminer v, l'équation

$$\text{v} = m + \frac{d\psi'}{dt} - \frac{d\psi}{dt}.\cos\theta + \frac{\Sigma.Bc.\cos(ct+\zeta)}{\sin\theta}.$$

Nous avons, par le n° 29,

$$\frac{d\psi'}{dt} = \frac{d\psi}{dt} - \cos\theta.\Sigma.Bc.\cos(ct+\zeta),$$

on aura donc

$$\text{v} = m + (1-\cos\theta).\frac{d\psi}{dt} + \left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right).\Sigma.Bc.\cos.(ct+\zeta).$$

Si l'on substitue dans cette équation pour $d\psi$ sa valeur, et si l'on met h à la place de θ, on trouve

$$\begin{aligned}\text{v} = m &+ (1-\cos h).l - \sin h.\Sigma.\frac{Bl^2}{c}.\cos(ct+\zeta)\\ &+ (1-\cos h).\Sigma.\left[\left(\frac{l^2}{c}-l\right).\text{tang}\,h + l\cot h\right].B\cos(ct+\zeta)\\ &+ \frac{1-\cos h}{\sin h}.\Sigma.Bc.\cos(ct+\zeta).\end{aligned}$$

Nous avons désigné par n la vitesse de rotation de la Terre, et nous avons vu que cette vitesse était invariable; il s'ensuit que $n - \text{v}$ est la vitesse relative dont un méridien quelconque de la Terre est animé par rapport au Soleil moyen qui se meut sur l'équateur; si l'on nomme donc ζ la longitude de ce méridien comptée de ce point, on aura $\zeta = \int (n - \text{v}).dt$, ou bien en substituant pour v sa valeur et en effectuant l'intégration indiquée,

$$\zeta = [n - m - (1 - \cos h).l].t + \sin h.\Sigma.\frac{Bl^2}{c^2}.\sin(ct + 6)$$
$$- (1 - \cos h).\Sigma.\left[\left(\frac{l^2}{c} - l\right).\tang h + l \cot h\right].\frac{B}{c}.\sin(ct +$$
$$- \frac{1 - \cos h}{\sin h}.\Sigma.B.\sin(ct + 6).$$

L'intervalle de temps pendant lequel cet angle croît de 360° forme le jour moyen solaire; on aura donc sa variation séculaire, en retranchant la valeur de ζ, déterminée pour une époque donnée, de sa valeur à une autre époque. On verra que cette variation ne s'élèverait pas à quelques minutes dans une période de plusieurs millions d'années, et que par conséquent on peut se dispenser d'y avoir égard.

33. Réduisons en nombres les précédentes formules, pour les comparer aux observations. Pour cela, considérons d'abord les quantités $\Sigma.B \sin(bt + 6)$ et $\Sigma.B \cos(bt + 6)$ qu'elles renferment et qui représentent l'inclinaison de l'écliptique vraie sur l'écliptique fixe, multipliée respectivement par le sinus et le cosinus de la longitude de son nœud. Ces quantités

correspondent à celles que nous avons désignées par p et q dans le n° 69 du livre II; on aura donc

$$p = \Sigma . \mathrm{B} \sin(bt + \mathcal{C}), \quad q = \Sigma . \mathrm{B} \cos(bt + \mathcal{C}).$$

La détermination exacte des valeurs de p et q dépend d'un calcul très compliqué, et suppose une connaissance parfaite des masses planétaires; il reste encore trop d'incertitude à cet égard, pour qu'on puisse employer la méthode que nous avons présentée n° 69, livre II, dans la recherche qui nous occupe. Mais comme les inégalités séculaires de ces quantités croissent avec une extrême lenteur, on peut les supposer développées suivant les puissances du temps, conformément à ce que nous avons dit dans le n° cité, et les résultats que l'on obtiendra ainsi pourront s'étendre à mille ou douze cents ans avant ou après l'époque que l'on aura choisie, ce qui suffit aux besoins de l'Astronomie. En prenant pour plan fixe celui de l'écliptique au commencement de 1750, et fixant à cette époque l'origine du temps t, M. Bouvard a trouvé, d'après les données les plus exactes que nous ayons sur les masses des planètes,

$$p = t.0'',066314 + t^2.0'',0000186\,58,$$
$$q = -t.0'',456917 + t^2.0'',000005741,$$

t exprimant un nombre quelconque d'années juliennes.

Si l'on développe les valeurs de p et q, par rapport au temps, on aura

$$p = \Sigma . \mathrm{B} \sin \mathfrak{C} + t . \Sigma . \mathrm{B}b \cos \mathfrak{C} - \frac{t^2}{2} . \Sigma . \mathrm{B}b^2 \sin \mathfrak{C},$$

$$q = \Sigma . \mathrm{B} \cos \mathfrak{C} - t . \Sigma . \mathrm{B}b \sin \mathfrak{C} - \frac{t^2}{2} . \Sigma . \mathrm{B}b^2 \cos \mathfrak{C}.$$

En comparant ces valeurs aux précédentes, on trouvera

$$\Sigma . \mathrm{B} \sin \mathfrak{C} = 0, \quad \Sigma . \mathrm{B}b \sin \mathfrak{C} = 0'',456917, \quad \Sigma . \mathrm{B}b^2 \sin \mathfrak{C} = -0'',0000373$$
$$\Sigma . \mathrm{B} \cos \mathfrak{C} = 0, \quad \Sigma . \mathrm{B}b \cos \mathfrak{C} = 0'',066314, \quad \Sigma . \mathrm{B}b^2 \cos \mathfrak{C} = -0'',0000114$$

34. Cela posé, développons les valeurs de θ, ψ, θ', ψ' en ayant égard aux termes dépendans du carré du temps. Prenons, pour plan fixe, celui de l'écliptique en 1750, l'origine du temps étant fixée au 1er janvier de la même année, ce qui donne $\Sigma . \mathrm{B} \sin \mathfrak{C} = 0$, et $\Sigma . \mathrm{B} \cos \mathfrak{C} = 0$. Si pour abréger on fait $c't + \mathfrak{C}' = \Lambda$, et qu'on observe que $c = l + b$, en négligeant dans une première approximation les quantités de l'ordre du carré des forces perturbatrices, ce qui revient à regarder θ comme constant dans les équations différentielles du n° 26, on aura

$$\theta = h + \frac{t^2}{2} . \Sigma . \mathrm{B}lb \cos \mathfrak{C} - \frac{\mathrm{B}'l\lambda}{c'(1+\lambda)} . \cos \Lambda,$$

$$\theta' = h - t . \Sigma . \mathrm{B}b \sin \mathfrak{C} - \frac{t^2}{2} . \Sigma . \mathrm{B} . (l+b) . b \cos \mathfrak{C} - \frac{\mathrm{B}'l\lambda}{c'(1+\lambda)} . \cos \Lambda,$$

$$\psi = lt - t^2 . \cot 2h . \Sigma . \mathrm{B}lb . \sin \mathfrak{C} + \frac{2\mathrm{B}'l\lambda}{c'(1+\lambda)} . \cot 2h . \sin \Lambda,$$

$$\psi' = lt - t . \cot h . \Sigma . \mathrm{B}b \cos \mathfrak{C} + t^2 . \left(\frac{1}{\sin 2h} . \Sigma . \mathrm{B}lb \sin \mathfrak{C} + \tfrac{1}{2} \cot h . \Sigma . \mathrm{B}b^2 . \sin \right.$$
$$+ \frac{2\mathrm{B}'l\lambda}{c'(1+\lambda)} . \cot 2h . \sin \Lambda.$$

Il ne reste plus qu'à substituer dans ces formules,

à la place des constantes qu'elles renferment, leurs valeurs résultantes des observations. Si l'on fait abstraction de la partie périodique, h désigne l'obliquité de l'écliptique à l'équateur, au commencement de 1750; la constante l dépend des trois momens d'inertie du sphéroïde terrestre. La figure et la constitution du globe sont loin d'être assez bien connues pour qu'on puisse déterminer directement cette constante; mais en différenciant la valeur de ψ', et supposant $t = 0$ dans sa différentielle, on a

$$\frac{d\psi'}{dt} = l - \cot h . \Sigma . \mathrm{B}b \cos \mathcal{C};$$

c'est l'expression de la précession moyenne des équinoxes pendant une année julienne, pour l'époque où commence le temps t : on peut donc, au moyen de l'équation précédente, déduire la valeur de l de celle de cette précession donnée par les observations. La précession annuelle était en 1750 de $50'',37572$; par conséquent,

$$l - \cot h . \Sigma . \mathrm{B}b \cos \mathcal{C} = 50'',37572.$$

L'obliquité de l'écliptique à la même époque était de $23^{\circ}\, 28'\, 18''$; on aura donc

$$h = 23^{\circ}\, 28'\, 18'', \quad l = 50'',52844.$$

Le rapport $\dfrac{\frac{\mathrm{L}}{r^3}}{\frac{\mathrm{L}'}{r'^3}}$ de l'action de la Lune à celle du Soleil est, d'après les observations des marées, 2,35333; par conséquent,

$$\lambda = 2.35333.$$

La constante B' est la tangente de l'inclinaison moyenne de l'orbe lunaire sur l'écliptique vraie. Cette inclinaison est de $5°8'49''$; on a

$$\log B' = 8.9545973;$$

c' est le moyen mouvement des nœuds de la Lune pendant l'unité de temps, c'est-à-dire pendant une année julienne; ce mouvement est rétrograde et de $19°21'21''$, d'après les observations. En réduisant cet arc en parties du rayon, on aura

$$c' = -0.33782.$$

Enfin, m étant le moyen mouvement du Soleil pendant l'année sidérale de $365^j,25638$, pour le rapporter à la même unité de temps que les valeurs précédentes, on fera la proportion

$$365^j,25638 : 360° :: 365^j,25 : m,$$

d'où l'on tire

$$m = 359°59'37''.$$

D'après ces données, on trouvera pour les valeurs de θ, θ', ψ et ψ', après un nombre quelconque t d'années juliennes comptées de 1750,

$$\theta = 23°28'18'' + t^2.0'',0000080978 + 9'',426.\cos A,$$
$$\theta' = 23°28'18'' - t.0'',456917 - t^2.0'',000002357 + 9'',426.\cos A,$$
$$\psi = t.50'',52844 - t^2.0'',00010427 - 17''615.\sin A,$$
$$\psi' = t.50'',37572 + t^2.0'',000109758 - 17'',615.\sin A.$$

Ces formules serviront à déterminer l'obliquité de l'écliptique et la précession des équinoxes dans l'intervalle de mille ou douze cents ans à partir de l'époque de 1750, en ayant soin de faire t négatif pour les temps antérieurs à cette époque.

35. On peut, par les variations observées dans l'ascension droite et la déclinaison des étoiles, déterminer directement celles de θ et de ψ; c'est ainsi que Bradley a trouvé le coefficient de cos A ou de la nutation : ce coefficient, selon lui, serait de 8″,997. Maskelyne, en discutant avec plus de soin les observations qui avaient servi à l'établir, l'a trouvé de 9″,449, et, suivant M. Brinkley, il est de 9″,250. Ces derniers nombres se rapprochent beaucoup du coefficient de la théorie, et la différence est dans les limites des erreurs des observations. Il suffirait, pour la faire disparaître, de changer un peu la valeur de λ, que nous avons supposée égale à 2.35333. Laplace, d'après les observations des marées, avait d'abord trouvé cette valeur égale à 3; il a été obligé ensuite de la diminuer beaucoup, ce qui la rend plus concordante avec celle qui résulte de plusieurs autres phénomènes. La valeur de λ que nous avons adoptée d'après lui, donne pour la masse de la Lune $\frac{1}{75}$ de celle de la Terre; elle est peut-être encore un peu trop forte.

L'une des observations les plus anciennes qui nous soient parvenues, est l'observation chinoise citée dans la quatrième édition de l'*Exposition du Système du Monde*, et qui se rapporte à l'an 1100 avant l'ère chrétienne. Selon cette observation, l'obliquité de l'écliptique était alors de 23° 54′ 2″; c'est la valeur

de θ', abstraction faite de la partie périodique. Pour remonter à cette époque, il faut faire $t = -2850$ dans les formules précédentes ; on trouve alors, en ne considérant que la variation séculaire,

$$\theta' = 23^\circ 49' 41''.$$

La différence entre la théorie et l'observation est donc de $4' 19''$; elle semble indiquer, dans l'obliquité de l'écliptique, une diminution plus rapide que nous ne la supposons. Au reste, cette différence paraîtra bien petite, si l'on considère l'incertitude de l'époque précise de cette ancienne observation, et l'inexactitude des résultats du gnomon qui lui ont servi de base.

36. On a, par les observations,

$$\frac{m'}{m} = 0{,}0748.$$

Cette valeur, jointe à celle de l, h, λ, m, B' et c' du n° 34, donnera

$$\theta'_{,} = 0'',519.\cos 2v + 0'',092.\cos 2v' - 0'',09167.\cos 2\Lambda_{,}$$
$$\psi'_{,} = -1'',196.\sin 2v - 0'',211.\sin 2v' + 0'',84445.\sin 2\Lambda_{,}$$

valeurs qu'il faudra joindre à celles de θ et de ψ pour avoir les valeurs complètes de ces quantités.

Les deux premiers termes de $\theta'_{,}$ et de $\psi'_{,}$ dépendent du mouvement du Soleil et de la Lune dans leurs orbites. Les astronomes ne les avaient pas considérés jusqu'ici, mais la précision des observations modernes oblige d'y avoir égard. Ils avaient pareillement négligé les inégalités de la précession et de la nutation qui dépendent du double de la longitude du

nœud de la Lune : on voit qu'elles sont en effet très petites, par rapport aux inégalités qui dépendent de la longitude du même nœud. M. Bessel a le premier considéré, dans la valeur de θ, l'inégalité dépendante de l'angle 2Λ; il n'y a aucun motif pour négliger l'inégalité correspondante de la précession qui a, comme on voit, un coefficient neuf fois plus considérable.

37. Rien n'est plus facile que de déterminer, d'après les résultats précédens, les dimensions de la petite ellipse que Bradley avait imaginée pour représenter les inégalités du mouvement de l'axe de la Terre. En effet, on peut regarder la précession ψ des équinoxes, sur l'écliptique fixe, comme produite par le mouvement rétrograde du pôle de l'équateur sur un cercle parallèle à cette écliptique ; ce mouvement est égal à $\delta\psi$ sin h ou à $lt \sin h + \frac{B'l\lambda}{c(1+\lambda)} \cdot \frac{\cos 2h}{\cos h} \cdot \sin \Lambda$, en ne considérant que la principale inégalité périodique de ψ. L'inégalité $\frac{B'l\lambda}{c(1+\lambda)} \cdot \cos \Lambda$ de la valeur de θ, indique d'ailleurs dans l'axe terrestre un mouvement qui se fait dans le plan du cercle de latitude qui passe par cet axe. Ce double mouvement peut être représenté de la manière suivante : on suppose le pôle terrestre mu sur la circonférence d'une petite ellipse dont le centre, qu'on peut considérer comme le lieu moyen du pôle, est situé sur le cercle mené parallèlement à l'écliptique fixe, et décrit uniformément chaque année 50″,52844 de sa circonférence. Le plan de cette ellipse est tangent à la sphère céleste, et son

grand axe, toujours compris dans le plan d'un cercle de latitude, sous-tend un arc de 18″,852. Le petit axe est au grand axe comme le cosinus du double de l'obliquité de l'écliptique est au cosinus de cette obliquité, c'est-à-dire comme cos $2h$ est à cos h ; cet axe sous-tend un arc de 14″,032. Pour déterminer la position du pôle sur la circonférence elliptique, on imagine, dans le plan de l'ellipse, un cercle décrit du même centre, avec son grand axe pour diamètre. On conçoit ensuite qu'un rayon de ce cercle le parcourt d'un mouvement uniforme et rétrograde, pendant une période des nœuds de la Lune, de manière qu'il coïncide avec la moitié du grand axe la plus voisine de l'écliptique, toutes les fois que le nœud moyen ascendant de l'orbe lunaire coïncide avec l'équinoxe du printemps. Enfin, de l'extrémité de ce rayon, on abaisse une perpendiculaire sur le grand axe de l'ellipse, et le point où cette perpendiculaire rencontre sa circonférence est le vrai lieu du pôle terrestre.

38. Déterminons maintenant les variations de l'année tropique, du jour moyen et du temps exprimé en jours moyens solaires.

La valeur de ψ' donne, en la différenciant,

$$\frac{d\psi'}{dt} = 50'',37572 + t.0'',0002195 16.$$

Cet arc réduit en temps, à raison de la circonférence entière pour une année sidérale de $365^j,25638$, donne

$$\frac{d\psi'}{dt} = 0^j,014197 + i.0^j,00000 61868,$$

i désignant un nombre quelconque de siècles dont l'origine est en 1750. La longueur de l'année tropique sera donc

$$365^{j},24219 - i.0^{j},000061868.$$

Il s'ensuit que cette longueur diminue d'une demi-seconde à peu près par siècle. Si l'on fait $i = -18,78$, on aura la longueur de l'année tropique qui avait lieu au temps d'Hipparque, ou cent vingt-huit ans avant l'ère chrétienne.

Si l'on développe la valeur de ζ du n° 32, qu'on néglige les termes de l'ordre l^2, et qu'on arrête l'approximation au carré du temps, on trouvera

$$\zeta = \left[n - m - (1 - \cos h).\left(l + \frac{\Sigma.Bb\cos\mathit{6}}{\sin h}\right)\right].t + Ht^2,$$

en faisant, pour abréger,

$$H = \left[\tfrac{1}{2}.\Sigma.Bb^2\sin\mathit{6} + \Sigma.Blb.\sin\mathit{6}.\left(1 + \frac{\cos 2h}{2\cos h}\right)\right].\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}h.$$

Le jour moyen est l'intervalle de temps qui répond à une augmentation de 360° de l'angle ζ; en appelant donc u sa longueur, on aura

$$360° = \left[n - m - (1 - \cos h).\left(l + \frac{\Sigma.Bb\sin\mathit{6}}{\sin h}\right)\right].u + 2Htu\ (a).$$

Si l'on prend pour unité de temps le jour moyen à l'époque où commence le temps t, en faisant dans l'équation précédente $u = 1$, $t = 0$, on aura, pour cet instant,

$$360° = n - m - (1 - \cos h).\left(l + \frac{\Sigma.Bb\sin\mathit{6}}{\sin h}\right).$$

Pour rapporter à la nouvelle unité de temps le dernier terme de cette équation, il faut y substituer, pour l et $\Sigma.Bb\sin\mathcal{C}$, leurs valeurs précédentes, après les avoir divisées par 365,25, parce que ces valeurs sont relatives à une année julienne. Ce terme devient alors inutile à considérer. La valeur de m donnée par l'observation et rapportée à la même unité, est

$$m = 0°,98561\,;$$

on aura donc

$$n = 360°,98561\,,$$

et la longueur du jour sidéral, exprimé en jours moyens, était par conséquent de 0,997262 à l'époque de 1750.

Si, après avoir divisé les valeurs de $\Sigma.Bb^2\sin\mathcal{C}$ et de $\Sigma.Blb\sin\mathcal{C}$, par le carré de 365,25, pour les rapporter à la nouvelle unité de temps, on les substitue dans l'expression de H, on trouvera

$$H = \frac{0'',00002803\,1}{(365,25)^2}.$$

L'équation (α) donne

$$u = 1 - \frac{2Ht}{360°}.$$

Soit donc i un nombre quelconque de siècles écoulés depuis 1750, on aura, par la grandeur du jour moyen à cette époque,

$$u = 1 - \frac{i.0'',118431}{(100000)^2},$$

d'où l'on voit que sa diminution séculaire sera tout-à-fait insensible.

Si l'on fait $u = \tau . 360°$, la variable τ sera la mesure du temps en jours moyens, et d'après les valeurs précédentes de u et de H, on aura

$$t = \tau - \frac{\tau^2 . 0.0000000021628}{(36525)^2}.$$

Le temps t n'est donc pas rigoureusement proportionnel à τ; mais comme le second terme de l'équation précédente est insensible, sa considération est inutile aux astronomes, et l'on peut continuer, sans inconvénient, à prendre le jour moyen solaire pour servir de mesure au temps.

39. La théorie donne le moyen de déterminer les rapports qui existent entre la précession et la nutation, et les lois de la densité et de l'ellipticité des couches de la Terre, de sa surface au centre. En effet, si dans l'équation (6), n° 31, on substitue pour l, λ, h, leurs valeurs n° 34, en observant que la valeur de m rapportée à la même unité de temps que l donne

$$m = 359°,99371,$$

et que l'on a en outre

$$\frac{m}{n} = 0.0027303,$$

on tirera, de cette équation

$$\frac{2C - A - B}{C} = 0.00619012;$$

et comme on a, à très peu près, A = B, il en ré-

sultera

$$\frac{C - A}{C} = 0.0030950 6.$$

Nous reviendrons sur les conséquences de cette équation, quand nous nous occuperons de la figure des corps célestes.

40. Nous avons jusqu'à présent regardé le sphéroïde terrestre comme entièrement solide ; cette supposition n'est point parfaitement exacte, et pour que les résultats de la théorie précédente fussent rigoureusement applicables à la Terre, il faudrait avoir la certitude qu'ils ne sont pas altérés par les oscillations et les frottemens du fluide qui la couvre en très grande partie. C'est ce que Laplace est parvenu à démontrer par une savante analyse qui l'a conduit à cet important théorème que nous nous contenterons de rappeler ici : *Les phénomènes de la précession des équinoxes et de la nutation de l'axe de la Terre, sont exactement les mêmes que si la mer formait une masse solide avec elle.*

CHAPITRE VI.

Mouvement de rotation de la Lune, autour de son centre de gravité.

41. Un phénomène extrêmement remarquable dans le système du monde, et qui paraît avoir été connu de tout temps, c'est que la Lune, dans son mouvement de révolution autour de la Terre, nous présente toujours la même face. L'explication que les anciens astronomes avaient donnée de ce singulier phénomène était erronnée; c'est à Hévélius et à Newton que l'on doit la connaissance de sa véritable cause. Ils montrèrent que pour en rendre raison, il fallait supposer une égalité parfaite entre le mouvement de révolution et le mouvement de rotation de la Lune; d'où il résulte qu'à mesure que son centre de gravité s'avance sur l'orbite qu'il décrit autour de la Terre, l'axe du sphéroïde lunaire qui est tourné vers nous décrit par un mouvement contraire le même nombre de degrés, en sorte que ce second mouvement, ramenant sans cesse vers le centre de la Terre le même hémisphère de la Lune, toutes les autres parties de sa surface nous restent à jamais cachées. Bientôt après, Dominique Cassini, par une observation plus attentive encore des taches de la

Lune, découvrit, dans son mouvement de rotation, de nouveaux phénomènes; il reconnut, 1°. *que l'inclinaison de l'axe de rotation de la Lune à l'écliptique est invariable;* 2°. *que les nœuds de son équateur coïncident constamment avec les nœuds de son orbite, c'est-à-dire que les plans de l'équateur et de l'orbite lunaire coupent toujours celui de l'écliptique suivant la même ligne droite.* Ces deux importantes découvertes, les plus belles peut-être dont nous soyons redevables à ce grand astronome, et que les observations de Tobie Mayer et de Lalande ont depuis confirmées, complètent la théorie astronomique du mouvement de rotation de la Lune, et ont permis aux géomètres de chercher, avec le secours de l'analyse, l'explication physique des singuliers phénomènes que ce mouvement nous présente.

D'Alembert tenta le premier cette entreprise. Il essaya d'appliquer à la Lune ses formules de la précession des équinoxes; mais la lenteur du mouvement de rotation de cet astre, et surtout la circonstance particulière de l'égalité de ce mouvement à celui de révolution, exigeait, pour traiter cette question, une analyse toute nouvelle, et celle qu'employa d'Alembert le conduisit à des résultats inexacts. Lagrange eut plus de succès, et son Mémoire, qui remporta le prix proposé par l'Académie des Sciences pour 1764, joint à celui qu'il publia en 1780 dans les Mémoires de Berlin, renferme la théorie complète du mouvement de rotation de la Lune autour de son centre de gravité.

Lagrange donne d'abord l'explication du phéno-

mène que l'on a nommé la *libration en longitude ;* il montre qu'il est dû à ce que l'égalité du mouvement moyen de révolution et de rotation de la Lune n'ayant point été rigoureusement exacte à l'origine des temps, ce qui paraîtrait en effet infiniment peu vraisemblable, il en est résulté une espèce de balancement dans l'axe du sphéroïde lunaire dirigé vers la Terre qui le fait osciller de part et d'autre du rayon vecteur mené du centre de la Terre à celui de la Lune, comme un pendule oscille sans cesse autour de la verticale dont on l'a légèrement écarté. Après avoir développé les lois de la libration en longitude, ainsi que les petites inégalités qui résultent dans le mouvement de rotation des inégalités du mouvement de révolution, passant à libration de la Lune en latitude, par un choix de variables extrêmement ingénieux, et qui a été utile dans un grand nombre de questions de la Mécanique céleste, il parvient à déterminer les lois du mouvement de l'équateur lunaire. Il montre que l'inclinaison de l'axe de rotation de la Lune est constante, et que le singulier phénomène de la coïncidence des nœuds de son équateur et de son orbite, en est une conséquence immédiate. Pour que cette coïncidence existe, il n'est pas nécessaire qu'elle ait eu lieu rigoureusement à l'origine du mouvement, il suffit que la différence qui existait à cette époque entre les positions des nœuds de l'équateur et de l'orbite lunaire ait été très petite; l'attraction de la Terre a établi ensuite et maintiendra éternellement la coïncidence de leurs nœuds moyens.

Cette belle analyse, comme la plupart de celles que nous a laissées Lagrange, a presque épuisé la question qu'elle avait à traiter, et les géomètres qui s'en sont depuis occupés, n'ont fait que la simplifier et ajouter aux inégalités de la libration en longitude et en latitude déterminées par lui, quelques inégalités nouvelles qui sont très petites en elles-mêmes, mais auxquelles la précision des observations modernes obligera désormais d'avoir égard. C'est ainsi que M. Poisson, en discutant avec un nouveau soin les inégalités de la libration en latitude, en a reconnu une qui dépend de la différence en longitude du nœud et du périgée lunaire, et qui peut devenir sensible; mais il s'est assuré en même temps qu'elle était la seule de cette espèce qui eût été omise dans l'analyse de Lagrange et de Laplace, en sorte que toutes les autres inégalités auxquelles ils s'étaient dispensés d'avoir égard pouvaient en effet être négligées.

On doit donc regarder comme complète la théorie physique de la libration de la Lune; la seule chose qu'elle laisse encore à désirer, c'est un assez grand nombre d'observations pour fixer avec précision les données que l'analyse emprunte à l'Astronomie, surtout celles qui déterminent les rapports des momens d'inertie des trois axes principaux du sphéroïde lunaire, et qui fournissent par conséquent des notions exactes sur sa figure. M. Nicollet a déjà exécuté un travail de ce genre, en y employant 174 observations faites par lui ou par MM. Bouvard et Arago; espérons qu'une plus longue suite encore

d'observations confirmera les résultats auxquels il est parvenu et ajoutera à leur précision.

On pourrait déterminer les inégalités du mouvement de rotation de la Lune troublé par l'action du Soleil et de la Terre, au moyen des formules contenues dans le chapitre Ier; mais il est plus simple de reprendre pour cela les équations différentielles du mouvement troublé, données n° 2. On verra aisément d'ailleurs comment les résultats que nous allons développer se concluraient des formules générales (P), n° 7, qui s'appliquent au mouvement de rotation de toutes les planètes.

42. Nous placerons l'origine des coordonnées au centre de la Lune, que nous supposerons immobile, et nous regarderons le Soleil et la Terre comme circulant autour d'elle. Soient donc L la masse de la Terre, x, y, z ses trois coordonnées relatives à un plan fixe mené par le centre de la Lune parallèlement au plan de l'écliptique à une époque donnée, r son rayon vecteur compté du même point; en ne poussant les approximations que jusqu'aux termes du troisième ordre par rapport aux dimensions du sphéroïde lunaire, on aura

$$= -\frac{3L}{4r'^5}.(A-B).\{[x'^2-(y'\cos\theta-z\sin\theta)^2].\cos 2\varphi+2x'.(y'\cos\theta-z\sin\theta).\sin 2\varphi\}$$
$$-\frac{3L}{4r'^5}.(A+B-2C).[x'^2+(y'\cos\theta-z\sin\theta)^2].$$

Dans cette expression, A, B, C représentent les trois momens d'inertie principaux de la Lune. Nous continuerons à donner le nom d'*équateur* au plan qui renferme les deux premiers axes principaux,

c'est-à-dire ceux auxquels se rapportent les momens d'inertie A et B. Ce plan n'est plus ici, comme dans le mouvement de rotation de la Terre, perpendiculaire à l'axe instantané de rotation; cet axe varie dans l'intérieur du sphéroïde lunaire, en sorte que les pôles de rotation se déplacent à la surface de la Lune, circonstance qui établit une différence essentielle entre le mouvement de rotation de ce satellite et celui du sphéroïde terrestre.

Cela posé, θ représente l'inclinaison de l'équateur lunaire sur le plan fixe parallèle à l'écliptique; φ est l'angle compris entre le premier axe principal de la Lune et le nœud descendant de son équateur; nous supposerons l'angle φ compté à partir de ce nœud dans le sens du mouvement de rotation de la Lune; enfin, nous nommerons ψ l'angle compris entre le nœud descendant de l'équateur lunaire et une droite fixe menée dans le plan de l'écliptique, et nous supposerons cet angle compté à partir de cette droite, en sens inverse de l'ordre des signes.

Si l'on différencie la fonction V par rapport aux trois variables φ, ψ, θ, en observant que l'on a, n° 25,

$$\frac{dx'}{d\psi} = -y', \quad \frac{dy'}{d\psi} = x', \quad \frac{dz'}{d\psi} = 0,$$

on aura

$$= \frac{3L}{2r'^5}.(A-B).\{[x'^2-(y'\cos\theta - z\sin\theta)^2].\sin 2\varphi - 2x'.(y'\cos\theta - z\sin\theta).\cos 2\varphi\},$$

$$= \frac{3L}{2r'^5}.(A-B).\{[y'.(y'\cos\theta - z\sin\theta) - x'^2\cos\theta)].\sin 2\varphi + x'.[y' + (y'\cos\theta - z\sin\theta).\cos\theta$$

$$+ \frac{3L}{2r'^5}.(A+B-2C).[x'.(y'\sin\theta + z\cos\theta).\sin\theta],$$

$$\frac{dV}{d\theta}=\frac{3L}{2r'^5}.(A-B).[x'.(y'\sin\theta+z\cos\theta).\sin 2\varphi-(y'\cos\theta-z\sin\theta).(y'\sin\theta+z\cos\theta).\cos 2\varphi]$$
$$+\frac{3L}{2r'^5}.(A+B-2C).[(y'\cos\theta-z\sin\theta).(y'\sin\theta+z\cos\theta)],$$

et par suite,

$$\frac{1}{\sin\theta}.\left(\frac{dV}{d\psi}+\cos\theta.\frac{dV}{d\varphi}\right)=\frac{3L}{2r'^5}.(A-B).[(y'\cos\theta-z\sin\theta).(y'\sin\theta+z\cos\theta).\sin 2\varphi$$
$$+x'.(y'\sin\theta+z\cos\theta).\cos 2\varphi]$$
$$+\frac{3L}{2r'^5}.(A+B-2C).[x'.(y'\sin\theta+z\cos\theta)].$$

Les trois équations (C) du n° 2 deviendront ainsi

$$\left.\begin{array}{l}
dp+(C-B).qrdt=\frac{3Ldt}{r'^5}.(C-B).[(y'\cos\theta-z\sin\theta).(y'\sin\theta+z\cos\theta).\cos\varphi \\
\qquad -x'.(y'\sin\theta+z\cos\theta).\sin\varphi], \\
dq+(A-C).prdt=\frac{3Ldt}{r'^5}.(A-C).[x'.(y'\sin\theta+z\cos\theta).\cos\varphi \\
\qquad +(y'\cos\theta-z\sin\theta).(y'\sin\theta+z\cos\theta).\sin\varphi], \\
dr+(B-A).pqdt=\frac{3Ldt}{2r'^5}.(B-A).\{2x'.(y'\cos\theta-z\sin\theta).\cos 2\varphi \\
\qquad -[x'^2-(y'\cos\theta-z\sin\theta)^2].\sin 2\varphi\}.
\end{array}\right\}(1)$$

Il est bon de remarquer qu'on peut arriver très simplement aux mêmes équations de la manière suivante; en ne poussant l'approximation que jusqu'aux termes du troisième ordre, nous avons trouvé, n° 25,

$$V=-\frac{3L}{2r'^5}.(Ax'^2+By'^2+Cz'^2),$$

x', y', z' représentant les coordonnées de l'astre L, rapportées aux trois axes principaux du sphéroïde attiré.

Cette expression donne, en la différenciant,

$$z'.\frac{dV}{dy'}-y'.\frac{dV}{dz'}=\frac{3L}{r'^5}.(C-B).y'z',$$
$$x'.\frac{dV}{dz'}-z'.\frac{dV}{dx'}=\frac{3L}{r'^5}.(A-C).x'z',$$
$$y'.\frac{dV}{dx'}-x'.\frac{dV}{dy'}=\frac{3L}{r'^5}.(B-A).x'y'.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans les équations (B), n° 2, et qu'on remplace ensuite les coordonnées x', y', z' par leurs valeurs en fonction des angles φ, ψ, θ, données n° 25, on retrouvera identiquement les équations (1).

L'observation ayant montré que l'inclinaison de l'équateur lunaire sur l'écliptique est toujours peu considérable, θ est un fort petit angle dont nous négligerons le carré et le produit par le carré de l'inclinaison de l'orbite lunaire, qui est aussi une très petite quantité. En observant que z est du même ordre que cette inclinaison, les trois équations (1) deviendront

$$Adp+(C-B).qrdt=\frac{3Ldt}{r'^5}.(C-B).[(y'\theta+z).(y'\cos\varphi-x'\sin\varphi)],$$
$$Bdq+(A-C).prdt=\frac{3Ldt}{r'^5}(A-C).[(y'\theta+z).(x'\cos\varphi+y'\sin\varphi)],$$
$$Cdr+(B-A).pqdt=\frac{3Ldt}{2r'^5}.(B-A).[2x'y'\cos 2\varphi-(x'^2-y'^2).\sin 2\varphi].$$

On peut encore aux coordonnées x', y', z de L, substituer d'autres variables qui rendent l'intégration plus facile. Soit v la longitude de la Terre vue de la Lune, cette longitude étant comptée du nœud

ascendant de l'équateur lunaire; soit α la longitude du nœud descendant de l'orbe lunaire compté du même point, et γ l'inclinaison de cette orbite sur l'écliptique fixe; en désignant par s' la latitude de la Terre au-dessus de ce dernier plan, on aura

$$\tang s' = \tang \gamma . \sin(v - \alpha).$$

La longitude de la Terre, comptée d'une droite fixe sur le plan parallèle à l'écliptique, sera $v - \psi$; en suivant donc l'analyse du n° 25, et en observant que γ est un très petit angle dont on peut négliger les carrés dans la recherche qui nous occupe, on trouvera

$$x' = r' \cos v, \quad y' = r' \sin v, \quad z = r'\gamma \sin(v - \alpha),$$

valeurs exactes, aux quantités près de l'ordre γ^2.

Les équations précédentes deviennent ainsi

$$\left.\begin{aligned}
A dp + (C-B).qr dt &= \frac{3L dt}{r'^3}.(C-B).[(\theta \sin v + \gamma \sin(v-\alpha)].\sin(v-\varphi);\\
B dq + (A-C).pr dt &= \frac{3L dt}{r'^3}.(A-C).[(\theta \sin v + \gamma \sin(v-\alpha)].\cos(v-\varphi);\\
C dr + (B-A).pq dt &= \frac{3L dt}{2r'^3}.(B-A).\sin 2(v-\varphi).
\end{aligned}\right\} (2)$$

43. Occupons-nous d'intégrer ces équations; considérons d'abord la troisième, d'où dépend le mouvement du sphéroïde lunaire autour de son axe de rotation.

Si la Lune était un solide de révolution, on aurait $B = A$, et par conséquent $r =$ constante. Ce cas n'a pas lieu dans la nature; mais on peut toujours regarder la quantité $B - A$ comme peu considérable,

et comme p et q sont aussi très petits, puisque l'observation a prouvé que l'axe de rotation de la Lune s'écarte toujours très peu de son troisième axe principal, on pourra négliger le produit $(B-A).pq$ à cause de la petitesse de ses trois facteurs. La dernière des équations (2) deviendra donc

$$dr = \frac{3Ldt}{2r^3} \cdot \left(\frac{B-A}{C}\right) . \sin 2(v-\varphi). \quad (3)$$

L'observation ayant fait voir que la Lune nous présente toujours à peu près le même hémisphère, on en a conclu que son moyen mouvement de rotation est exactement égal à son moyen mouvement de révolution; en sorte que si ce mouvement est sujet à quelques inégalités, elles doivent être peu considérables.

Or, si l'on néglige, comme nous le supposons, les quantités de l'ordre θ^2, l'arc $\varphi-\psi$ représentera le mouvement de rotation de la Lune autour de son troisième axe principal, mouvement qui serait uniforme sans l'action des forces perturbatrices. Si l'on désigne donc par u les inégalités qu'elles peuvent y produire, par $mt+c$ la longitude moyenne de la Terre vue de la Lune et correspondante au temps t, longitude qui est égale à celle de la Lune vue de la Terre plus une demi-circonférence, on aura

$$\varphi-\psi = mt + c + u,$$

et l'angle u représentera la libration de la Lune, ou l'excès de son moyen mouvement de rotation sur son moyen mouvement de révolution. Il ne s'agit donc, pour déterminer la libration, que de connaître

la valeur de l'angle u. Or, il est facile d'y parvenir en introduisant cette nouvelle variable à la place de r dans l'équation (3), et en intégrant ensuite l'équation résultante.

En effet, on a, aux quantités près de l'ordre θ^2,

$$r = \frac{d\varphi - d\psi}{dt}, \qquad (4)$$

et par conséquent

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d^2u}{dt^2}.$$

Nous faisons ici abstraction des inégalités séculaires qui affectent le moyen mouvement de la Lune, parce qu'il n'en résulte aucun terme appréciable dans la valeur de u, et nous regardons par conséquent m et c comme des quantités constantes.

L'angle v représentant la longitude de la Terre vue de la Lune et comptée à partir du nœud descendant de l'équateur lunaire, $v - \psi$ sera la même longitude comptée à partir d'un équinoxe fixe, l'angle ψ devant être compté, comme nous l'avons dit, en sens inverse de l'angle v. Cette longitude est égale à $mt + c$, plus à une suite de sinus et de cosinus d'angles multiples du moyen mouvement mt; on aura par conséquent

$$v = mt + c + \psi + \Sigma . \mathrm{H} \sin (ht + h'),$$

en représentant par $\Sigma . \mathrm{H} \sin (ht + h')$, les inégalités de v ordonnées par rapport à mt.

Cette valeur, comparée à celle de $\varphi + \psi$, donne

$$v - \varphi = -u + \Sigma . \mathrm{H} \sin (ht + h').$$

et par conséquent

$$\sin 2(v-\varphi)=-\sin 2u+2\cos 2u.\Sigma.\text{H}\sin(ht+h')-\text{etc.}$$

L'équation (3) devient ainsi, en y substituant $\frac{d^2u}{dt^2}$ pour $\frac{dr}{dt}$,

$$\frac{d^2u}{dt^2}=-\frac{3\text{L}}{2r'^3}\left(\frac{\text{B}-\text{A}}{\text{C}}\right).\sin 2u+\frac{3\text{L}}{r'^3}.\left(\frac{\text{B}-\text{A}}{\text{C}}\right).\Sigma.\text{H}\cos 2u.\sin(ht+h'$$

L'angle u étant toujours une très petite quantité, si l'on néglige son carré et ses puissances supérieures, on pourra supposer dans cette équation $\sin 2u=2u$ et $\cos 2u=1$; de plus, comme on a, à très peu près, $\frac{\text{L}}{r'^3}=m^2$, l'équation précédente deviendra

$$\frac{d^2u}{dt^2}+3m^2.\left(\frac{\text{B}-\text{A}}{\text{C}}\right).u=3m^2.\left(\frac{\text{B}-\text{A}}{\text{C}}\right).\Sigma.\text{H}\sin(ht+h'). \quad (5)$$

Si l'on fait d'abord abstraction des termes sans u, on satisfera à cette équation en supposant

$$u=\text{K}\sin(kt+k'),$$

et l'on aura, pour déterminer k,

$$k=m.\sqrt{3.\left(\frac{\text{B}-\text{A}}{\text{C}}\right)},$$

K et k' étant deux constantes qui demeurent arbitraires.

Si ensuite on désigne par $\text{L}\sin(ht+h')$, le terme de la valeur de u qui doit correspondre au terme $3m^2.\left(\frac{\text{B}-\text{A}}{\text{C}}\right).\text{H}\sin(ht+h')$ de l'équation (5), en y substituant cette valeur et en comparant les termes

qui ont même sinus ou même cosinus, on aura

$$-\mathrm{L}h^2 + 3m^2.\left(\frac{\mathrm{B}-\mathrm{A}}{\mathrm{C}}\right).(\mathrm{L}-\mathrm{H}) = 0,$$

d'où l'on tire

$$\mathrm{L} = -\frac{3m^2.\left(\frac{\mathrm{B}-\mathrm{A}}{\mathrm{C}}\right).\mathrm{H}}{h^2 - 3m^2.\left(\frac{\mathrm{B}-\mathrm{A}}{\mathrm{C}}\right)}.$$

Ainsi, d'après la théorie des équations linéaires, la valeur complète de u sera

$$u = \mathrm{K}\sin(kt + k') + \Sigma.\mathrm{L}\sin(ht + h'),$$

K et k' étant les deux constantes arbitraires qui doivent entrer dans l'intégrale finie de l'équation du second ordre (5), et le signe Σ désignant une suite de termes semblables au terme $\mathrm{L}\sin(ht + h')$, et déterminés de la même manière.

44. Examinons les conséquences qui résultent de cette expression. Le premier terme de la valeur de u restera toujours peu considérable si l'arbitraire K est supposée très petite, et par conséquent la partie de la libration de la Lune qui dépend de l'état initial du mouvement sera toujours insensible. Jusqu'ici, les observations les plus précises ne paraissant indiquer aucune trace de cette inégalité, il en faut conclure, ou que la constante K était nulle à l'origine du mouvement, ou que du moins son influence a été annulée depuis par l'effet de quelque cause étrangère. Cette remarque est analogue à celle que nous avons faite dans le n° 13, relativement à la Terre.

On a, par ce qui précède, $k = m.\sqrt{3.\left(\frac{A-B}{C}\right)}$, m représentant le moyen mouvement de la Lune dans l'unité de temps; la durée de la période de l'argument dont il s'agit sera donc d'un mois sidéral divisé par $\sqrt{3.\left(\frac{A-B}{C}\right)}$. Nous verrons bientôt que ce diviseur est une très petite quantité, et que des observations récentes sur lesquelles on peut compter donnent, à très peu près, 0.0018 pour sa valeur. Cette durée, dans ce cas, n'excéderait pas deux années; il sera donc facile, par des observations faites à des intervalles de temps assez grands pour que la variation de l'angle kt soit sensible, de reconnaître si le coefficient K a ou non une valeur appréciable.

Au reste, il faut observer que ce premier terme de la valeur de u sert à expliquer, par la théorie, comment il se fait que la Lune nous présente toujours le même hémisphère, sans qu'il soit besoin de supposer que la vitesse primitive de rotation, imprimée à cet astre, a été exactement égale à sa vitesse de révolution autour de la Terre, ce qui paraît en effet infiniment peu vraisemblable. Pour le faire voir, remarquons qu'en faisant abstraction de l'inclinaison de l'équateur lunaire à l'écliptique, on a, par le n° 43,

$$d\varphi - d\psi = rdt, \quad r = \frac{du}{dt} + m;$$

r représente la vitesse de rotation de la Lune autour de son troisième axe principal; on aura, par suite,

$$\int rdt = mt + c + u.$$

Cette intégrale exprime le mouvement de rotation de la Lune; et comme u n'est composé que de termes périodiques, on voit que le moyen mouvement de rotation et celui de translation sont parfaitement égaux entre eux, sans qu'il soit pour cela nécessaire que les mouvemens de rotation et de révolution de la Lune aient été égaux à l'origine du mouvement. En effet, en différenciant et substituant pour $\frac{du}{dt}$ sa valeur, on a

$$r = m + m\mathrm{K}.\sqrt{3.\left(\frac{\mathrm{B}-\mathrm{A}}{\mathrm{C}}\right)}.\cos(kt+k') + \Sigma.\mathrm{L}l.\cos(lt+l').$$

En sorte que comme K est arbitraire, la vitesse primitive de rotation de la Lune peut être supposée quelconque; et il suffit, pour que les moyens mouvemens de rotation et de révolution aient dans la suite toujours coïncidé, que cette vitesse ait été comprise entre

$$m + m\mathrm{K}.\sqrt{3.\left(\frac{\mathrm{B}-\mathrm{A}}{\mathrm{C}}\right)} \text{ et } m - m\mathrm{K}.\sqrt{3.\left(\frac{\mathrm{B}-\mathrm{A}}{\mathrm{C}}\right)}.$$

Ces limites sont très resserrées, il est vrai, et elles s'éloignent peu de la valeur moyenne m, à cause de la petitesse de la constante K et du coefficient $\sqrt{3.\left(\frac{\mathrm{B}-\mathrm{A}}{\mathrm{C}}\right)}$; mais elles suffisent pour faire disparaître l'invraisemblance qu'il y a à supposer, à l'origine du mouvement, une parfaite égalité entre le moyen mouvement de rotation de la Lune et son moyen mouvement de révolution.

Pour que la libration en longitude demeure tou-

jours peu considérable, comme l'observation l'indique, il faut que les coefficiens L, etc., des différens termes de la valeur de u, soient supposés très petits, ainsi que le coefficient K; mais cette condition ne suffit pas, il faut de plus que les valeurs des constantes k, h, etc., soient toutes réelles; car autrement quelques-uns des sinus ou cosinus qui entrent dans l'expression de u se changeraient en arcs de cercle ou en exponentielles, et la valeur de u pourrait croître indéfiniment, ce qui est contre l'hypothèse. Les valeurs de h et des autres coefficiens semblables sont réelles de leur nature; mais pour que celle de k le soit aussi, il faut que $\frac{B-A}{C}$ soit une quantité positive, c'est-à-dire que l'on ait $B > A$. Or, A est le moment d'inertie qui se rapporte à l'axe principal de l'équateur lunaire, qui est constamment dirigé vers la Terre; en effet, cet axe est celui qui forme l'angle φ avec l'intersection de l'équateur lunaire et de l'écliptique, tandis que la projection du rayon vecteur mené de la Lune à la Terre, forme l'angle v avec la même ligne. $v-\varphi$ est toujours, par ce qui précède, un très petit angle; le premier axe principal de la Lune est donc toujours, à très peu près, dirigé vers la Terre; et il est naturel par conséquent de supposer que l'équateur lunaire s'est allongé dans ce sens par l'effet de l'attraction de la Terre, en sorte que le moment d'inertie A, qui se rapporte à l'axe de l'équateur dirigé vers la Terre, doit être plus petit que le moment d'inertie B, relatif au second axe principal situé dans le même plan.

Quant aux coefficiens K, L, etc., comme le premier K est arbitraire, sa valeur peut être supposée aussi petite qu'on voudra ; mais pour rendre en même temps très petite celle de L, il faudra supposer une valeur très petite à la quantité $\frac{B-A}{C}$. On voit, en effet, d'après l'expression de L, que ce coefficient pourrait devenir sensible si H avait une valeur assez grande, ou si la valeur de h était peu différente de $m.\sqrt{3.\left(\frac{B-A}{C}\right)}$, ce qui rendrait très petit le dénominateur de cette expression.

45. Nous avons désigné par $\Sigma.\mathrm{H}\sin(ht+h')$ la somme des termes périodiques de la longitude vraie de la Lune : le premier de ces termes, ou l'équation du centre, est celui qui a le plus grand coefficient ; en le supposant représenté par $\mathrm{H}\sin(ht+h')$, on a, par la théorie de la Lune, $\mathrm{H}=22682''$, $h^2=m^2.0.98317$; on aura donc, en vertu de ce terme,

$$\mathrm{L}=-\frac{3.\left(\frac{B-A}{C}\right).22682''}{0.98317-3.\left(\frac{B-A}{C}\right)},$$

d'où l'on tire

$$\frac{B-A}{C}=\frac{0''.32772.\mathrm{L}}{\mathrm{L}-22682''}.$$

La valeur de L doit être peu considérable, puisque le terme de la valeur de u qui en dépend n'a pu être reconnu par l'observation. Il est probable, vu la précision des observations modernes, qu'elle n'excède guère un demi-degré ; si l'on suppose donc $\mathrm{L}=\mp 32'$ ou $1920''$, on aura

$$\frac{B-A}{C} = 0.025575, \quad \frac{B-A}{C} = -0.030306.$$

La valeur de B — A devant d'ailleurs être nécessairement positive, il en résulte qu'elle est au-dessous de 0.025575, et que L est négatif.

Parmi les termes de l'expression de u qui peuvent devenir sensibles en acquérant de très petits diviseurs, le plus considérable est celui qui dépend de l'équation annuelle; il suffira donc d'examiner l'effet de ce terme. Si l'on suppose que $H \sin(ht + h')$ représente cette équation, $ht + h'$ étant ici l'anomalie moyenne du Soleil, on aura, par la théorie de cet astre, $H = 669''$ et $h = m.0.0748$, et par conséquent $h^2 = m^2.0.005595$; on aura donc, en vertu de ce terme,

$$L = -\frac{3.\left(\frac{B-A}{C}\right).669''}{0.005595 - 3.\left(\frac{B-A}{C}\right)},$$

d'où l'on tire

$$\frac{B-A}{C} = \frac{0'',001865.L}{L - 669''}.$$

Puisque les observations n'ont point fait reconnaître le terme de la valeur de u proportionnel à L, ce coefficient doit être peu considérable; si l'on suppose en conséquence $L = \mp 1920''$, on aura

$$\frac{B-A}{C} = 0.0013831, \quad \frac{B-A}{C} = 0.0028624.$$

Ainsi, dans le cas de L négatif, les deux limites

de $\frac{B-A}{C}$ sont zéro et 0.0013831, et, dans le cas de L positif, 0.0028624 et ∞ ou 0.0028624 et 0.025575, puisque nous venons de voir que $\frac{B-A}{C}$ ne pouvait pas dépasser cette dernière limite. Nous verrons tout à l'heure que la valeur de $\frac{B-A}{C}$ est moindre que 0.0006; elle est donc comprise entre zéro et 0.0013831, et par conséquent L est négatif.

Si l'on substitue dans la valeur précédente de L, pour $\frac{B-A}{C}$ la dernière limite que nous venons d'assigner à cette quantité, on trouvera, relativement à l'équation du centre, L=—41″, et relativement à l'équation annuelle, L=—317″. Ce sont les limites de ce coefficient, et par conséquent celles des argumens qui en dépendent dans la valeur de *u*. Or, le dernier arc, vu de la Terre sur la surface de la Lune, ne s'élèverait pas à 1″,5; c'est la seule partie de la libration qu'on puisse espérer de rendre sensible par les observations; et si l'on parvenait à la déterminer, on en déduirait la valeur de $\frac{B-A}{C}$ qui n'est pas encore connue d'une manière positive; mais sa petitesse rend cette appréciation très difficile.

MM. Bouvard et Nicollet, par la discussion de 174 observations de la libration de la Lune en longitude, ont trouvé le coefficient de l'inégalité dépendante de l'équation annuelle, de 4′45″, d'où l'on conclut

$$\frac{B-A}{C}=0,0005567.$$

Si l'on détermine, d'après cette valeur, le coefficient du terme de u qui dépend de l'équation du centre de la Lune et qu'on joigne ce terme à celui de l'équation annuelle déterminé par l'observation, on aura

$$u = -285'' \sin l - 39'' \sin l',$$

l étant l'argument de l'équation annuelle de la Lune et l' celui de son équation du centre.

La valeur précédente de $\frac{B-A}{C}$ s'accorde avec la limite que nous avons fixée à cette quantité, et qui a été conclue de la libration de la Lune en latitude, plus facile à observer que la libration en longitude. Cependant, il reste encore de l'incertitude sur ce résultat, et il est à désirer que de nouvelles observations ajoutent à son exactitude.

46. Occupons-nous maintenant du mouvement des nœuds et des variations de l'inclinaison de l'équateur lunaire. Pour déterminer les mouvemens de ce plan, il faut connaître les angles ψ et θ d'où dépend à chaque instant sa position par rapport à l'écliptique fixe : or, l'angle ψ est donné en fonction de φ et du temps t, au moyen de l'équation (4); il ne nous reste donc à déterminer que les angles θ et φ. Pour y parvenir, il convient de leur substituer de nouvelles variables qui facilitent l'intégration des équations d'où leurs valeurs dépendent. On conçoit en effet que si l'on choisit ces variables de manière à ce qu'elles soient astreintes, par la nature même de la question, à demeurer constamment très petites, on pourra, dans la première approximation, négliger les termes

où elles se trouveraient multipliées entre elles ou par leurs différences, et l'on n'aura plus à considérer que des équations linéaires, les seules qui puissent, comme on sait, s'intégrer dans tous les cas, quel que soit le nombre des variables qu'elles renferment et le degré de leur différence. Ces conditions sont faciles à remplir dans la question qui nous occupe; car, comme nous avons supposé l'inclinaison θ de l'équateur lunaire à l'écliptique fixe toujours peu considérable, il suffira, pour y satisfaire, de substituer aux variables φ et θ, des variables analogues à celles que nous avons déjà employées dans un cas semblable, n° 34, livre I[er].

Soient donc

$$s = \text{tang}\,\theta.\sin\varphi, \quad s' = \text{tang}\,\theta.\cos\varphi.$$

En différenciant et négligeant le carré de θ, on aura

$$\frac{ds}{dt} = \sin\varphi.\frac{d\theta}{dt} + \theta\cos\varphi.\frac{d\varphi}{dt},$$

$$\frac{ds'}{dt} = \cos\varphi.\frac{d\theta}{dt} - \theta\sin\varphi.\frac{d\varphi}{dt}.$$

Les équations (a) du n° 1 donnent

$$\frac{d\theta}{dt} = -p\cos\varphi + q\sin\varphi,$$

$$\theta.\frac{d\varphi}{dt} = p\sin\varphi + q\cos\varphi + r\,\text{tang}\,\theta.$$

Substituons ces valeurs dans les équations précédentes; on trouve

$$\frac{ds}{dt} = rs' + q, \qquad \frac{ds'}{dt} = -rs - p, \qquad (6)$$

d'où, en différenciant, on tire

$$\frac{d^2s}{dt^2} - r\frac{ds'}{dt} - s'\frac{dr}{dt} = \frac{dq}{dt},$$
$$\frac{d^2s'}{dt^2} + r\frac{ds}{dt} + s\frac{dr}{dt} = -\frac{dp}{dt}.$$

Si l'on remplace dans ces équations $\frac{dp}{dt}$ et $\frac{dq}{dt}$ par leurs valeurs tirées des équations (2), et qu'on observe qu'on peut supposer r constant et égal à m dans les termes multipliés par les quantités très petites s et s', et par leurs différences, et qu'on peut négliger par la même raison les différentielles $s.\frac{dr}{dt}$, $s'.\frac{dr}{dt}$, on aura

$$\frac{d^2s}{dt^2} - m.\frac{ds'}{dt} + \left(\frac{A-C}{B}\right).mp = \frac{3L}{r^3}.\left(\frac{A-C}{B}\right).[\theta\sin\nu + \gamma\sin(\nu-\alpha)].\cos(\nu-\varphi),$$
$$\frac{d^2s'}{dt^2} + m.\frac{ds}{dt} + \left(\frac{B-C}{A}\right).mq = \frac{3L}{r^3}.\left(\frac{B-C}{A}\right).[\theta\sin\nu + \gamma\sin(\nu-\alpha)].\sin(\nu-\varphi),$$

ou bien, en mettant pour p et q leurs valeurs tirées des équations (6)

$$\frac{d^2s}{dt^2} - \left(\frac{A+B-C}{B}\right).m\frac{ds'}{dt} - \left(\frac{A-C}{B}\right).m^2s = \frac{3L}{r^3}.\left(\frac{A-C}{B}\right).[\theta\sin\nu + \gamma\sin(\nu-\alpha)].\cos(\nu-\varphi),$$
$$\frac{d^2s'}{dt^2} + \left(\frac{A+B-C}{A}\right).m\frac{ds}{dt} - \left(\frac{B-C}{A}\right).m^2s' = \frac{3L}{r^3}.\left(\frac{B-C}{A}\right).[\theta\sin\nu + \gamma\sin(\nu-\alpha)].\sin(\nu-\varphi).$$

ν est la longitude de la Terre vue de la Lune, et rapportée au nœud descendant de l'équateur lunaire; $\nu - \alpha$ est la même longitude comptée du nœud ascendant de l'orbite lunaire, en sorte que $\gamma \sin(\nu-\alpha)$ est la latitude de la Terre vue de la Lune. Si l'on

remplace $\frac{L}{r^3}$ par m^2 dans ces équations et qu'on observe que

$$\begin{aligned}\tan\theta \sin v &= \tan\theta \cos\varphi \sin(v-\varphi) + \tan\theta \sin\varphi \cos(v-\varphi)\\ &= s' \sin(v-\varphi) + s\cos(v-\varphi),\end{aligned}$$

elles deviendront

$$\begin{aligned}&\frac{d^2s}{dt^2} - \left(\frac{A+B-C}{B}\right).m\frac{ds'}{dt} - \left(\frac{A-C}{B}\right).m^2 s = 3m^2.\left(\frac{A-C}{B}\right)\\ &\quad\times[s'\sin(v-\varphi) + s\cos(v-\varphi) + \gamma\sin(v-\alpha)].\cos(v-\varphi),\\ &\frac{d^2s'}{dt^2} + \left(\frac{A+B-C}{A}\right).m\frac{ds}{dt} - \left(\frac{B-C}{A}\right).m^2 s' = 3m^2.\left(\frac{B-C}{A}\right)\\ &\quad\times[s'\sin(v-\varphi) + s\cos(v-\varphi) + \gamma\sin(v-\alpha)].\sin(v-\varphi).\end{aligned}$$

L'angle $v-\varphi$ étant toujours, par ce qui précède, peu considérable, $\sin(v-\varphi)$ est une très petite quantité dont on peut, sans erreur sensible dans les seconds membres de ces équations, négliger le carré multiplié par les quantités très petites s et s' ; on aura ainsi

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2s}{dt^2} - \left(\frac{A+B-C}{B}\right).m\frac{ds'}{dt} - 4.\left(\frac{A-C}{B}\right).m^2 s = 3m^2.\left(\frac{A-C}{B}\right)\\ &\quad\times[s'\sin(v-\varphi) + \gamma\sin(v-\alpha)].\cos(v-\varphi),\\ &\frac{d^2s'}{dt^2} + \left(\frac{A+B-C}{A}\right).m\frac{ds}{dt} - \left(\frac{B-C}{A}\right).m^2 s' = 3m^2.\left(\frac{B-C}{A}\right)\\ &\quad\times[s\cos(v-\varphi) + \gamma\sin(v-\alpha)].\sin(v-\varphi).\end{aligned}\right\}(7)$$

47. Occupons-nous d'intégrer ces équations. Si l'on fait d'abord abstraction de leurs seconds membres, elles deviennent simplement

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2s}{dt^2}-\left(\frac{A+B-C}{B}\right).m\frac{ds'}{dt}-4.\left(\frac{A-C}{B}\right).m^2s=0,\\ \frac{d^2s'}{dt^2}+\left(\frac{A+B-C}{A}\right).m\frac{ds}{dt}-\left(\frac{B-C}{A}\right).m^2s'=0.\end{aligned}\right\}(8)$$

Pour satisfaire à ces équations, supposons

$$s=M\sin(lt+k),\quad s'=M'\cos(lt+h).$$

Ces valeurs, substituées dans les équations précédentes, donnent

$$Ml^2-\left(\frac{A+B-C}{B}\right).mMl+4\left(\frac{A-C}{B}\right).m^2M=0,$$
$$M'l^2-\left(\frac{A+B-C}{A}\right).mMl+\left(\frac{B-C}{A}\right).m^2M'=0.$$

De la seconde de ces équations, on tire

$$M'=\frac{\left(\frac{A+B-C}{A}\right).ml}{l^2+\left(\frac{B-C}{A}\right).m^2}.M\qquad(9)$$

Cette valeur, substituée dans la première, donne

$$l^2-\frac{\frac{(A+B-C)^2}{AB}.m^2l^2}{l^2+\left(\frac{B-C}{A}\right).m^2}+4.\left(\frac{A-C}{B}\right).m^2=0.\qquad(10)$$

Les équations (9), (10) serviront à déterminer les constantes M' et l; les deux autres constantes M et k demeureront arbitraires.

Si l'on ordonne l'équation (10) par rapport à l, on aura

$$l^4 - \left[\frac{(A+B-C)^2}{AB} - 4\cdot\left(\frac{A-C}{B}\right) - \left(\frac{B-C}{A}\right)\right].m^2l^2 + 4\left(\frac{A-C}{B}\right)\left(\frac{B-C}{A}\right).m^4 = 0,$$

équation qu'on peut résoudre comme une équation du second degré, et qui donnera pour l deux valeurs. Désignons la première par l et la seconde par l'; on aura, par la théorie des équations linéaires,

$$s = M \sin(lt + k) + N \sin(l't + k'),$$
$$s' = M' \cos(lt + k) + N' \cos(l't + k'),$$

en supposant, pour abréger,

$$M' = \frac{\left(\frac{A+B-C}{A}\right).ml}{l^2 + \left(\frac{B-C}{A}\right).m^2}.M, \quad N' = \frac{\left(\frac{A+B-C}{A}\right).ml'}{l'^2 + \left(\frac{B-C}{A}\right).m^2}.N. \quad (12)$$

Ces valeurs de s et s' renferment quatre arbitraires, M, N, k, k'; elles sont donc les intégrales complètes des équations (8).

48. Reprenons maintenant les équations (7). La quantité $\gamma \sin(v - \alpha)$ représente, comme nous l'avons dit, la latitude de la Terre vue de la Lune, latitude qui est égale et de signe contraire à celle de la Lune vue de la Terre. Sa valeur peut se développer, d'après les formules du n° 25, liv. II, en une suite de sinus et de cosinus des multiples du moyen mouvement mt; il en est de même des trois quantités $\sin v$, $\sin(v - \varphi)$ et $\cos(v - \varphi)$; en substituant donc ces valeurs dans les équations (7), leurs seconds membres se trouveront composés d'une suite de termes semblables, et chacun d'eux produira, dans les valeurs de s et

s', un terme correspondant qu'on déterminera de la manière suivante :

Soit $H\sin(ht+h')$ un terme quelconque du développement de $[s'\sin(v-\varphi)+\gamma\sin(v-\alpha)].\cos(v-\varphi)$, ht désignant ici un multiple quelconque de mt, et H et h' étant des fonctions données des élémens de l'orbite lunaire ; et soit $H'\cos(ht+h')$ le terme du développement de $[s\cos(v-\varphi)+\gamma\sin(v-\alpha)].\sin(v-\varphi)$ qui lui correspond, c'est-à-dire qui a même argument ht ; on aura, en ne considérant que ces termes,

$$\frac{d^2s}{dt^2}-\left(\frac{A+B-C}{B}\right).m\frac{ds'}{dt}-4.\left(\frac{A-C}{B}\right).m^2s=3m^2.\left(\frac{A-C}{B}\right).H\sin(ht+h'),$$
$$\frac{d^2s'}{dt^2}+\left(\frac{A+B-C}{A}\right).m\frac{ds}{dt}-\left(\frac{B-C}{A}\right).m^2s'=3m^2.\left(\frac{B-C}{A}\right).H'\cos(ht+h').$$

On satisfait à ces équations, en supposant

$$s=P\sin(ht+h'),\quad s'=P'\cos(ht+h').$$

Si l'on substitue ces valeurs dans les équations précédentes, on trouve, pour déterminer P et P',

$$-Ph^2+\left(\frac{A+B-C}{B}\right).mP'h-\left(\frac{A-C}{B}\right).m^2(4P+3H)=0,$$
$$-P'h^2+\left(\frac{A+B-C}{A}\right).mPh-\left(\frac{B-C}{A}\right).m^2(P'+3H')=0,$$

d'où l'on tire

$$P=\frac{3.\left[h^2+\left(\frac{B-C}{A}\right).m^2\right].\left(\frac{A-C}{B}\right)m^2H+3.\left(\frac{A+B-C}{B}\right).\left(\frac{B-C}{A}\right).m^3hH'}{D}$$

$$P'=\frac{3.\left[h^2+4.\left(\frac{A-C}{B}\right).m^2\right].m^2H'+3.\left(\frac{A+B-C}{A}\right).\left(\frac{A-C}{B}\right).m^3hH}{D};$$

en faisant pour abréger,

$$D = \frac{(A+B-C)}{AB}.m^2h^2 - \left[h^2+4\left(\frac{B-C}{A}\right).m^2\right]\left[h^2+4.\left(\frac{A-C}{B}\right).m^2\right].$$

Chacun des termes des produits

$$[s' \sin(v-\varphi) + \gamma \sin(v-\alpha)].\cos(v-\varphi)$$

et

$$[s \cos(v-\varphi) + \gamma \sin(v-\alpha)].\sin(v-\varphi)$$

introduira dans les valeurs de s et s' des termes semblables, et l'on aura les valeurs complètes de ces quantités en prenant la somme de tous ces termes, et en y joignant les valeurs de s et s' qui ont lieu lorsqu'on suppose nuls les seconds membres des équations (7). On trouve, de cette manière,

$$s = M \sin(lt+k) + N \sin(l't+k') + P \sin(ht+h') + \text{etc.},$$
$$s' = M' \cos(lt+k) + N \cos(l't+k') + P \cos(ht+h') + \text{etc.},$$

M, N, k, k' étant des constantes arbitraires.

49. Ces valeurs satisfont aux équations (7) dans toute leur étendue; elles doivent donc renfermer les lois de la précession des équinoxes lunaires et de la nutation de son axe de rotation. Mais avant d'en examiner les conséquences, il est bon de faire quelques observations qui en restreindront la généralité.

Nous avons dit, nº 45, que $\frac{B-A}{C}$ était toujours une quantité très petite; on verra bientôt qu'il en est de même de $\frac{C-A}{C}$, en sorte que si l'on fait

$$\frac{C-A}{C} = i, \quad \frac{C-B}{C} = i',$$

ce qui donne $A = C.(1 - i)$ et $B = C.(1 - i')$, i et i' seront de très petites quantités dont on pourra négliger les carrés et le produit. Si l'on substitue ces valeurs dans l'équation (11), elle devient

$$l^4 - \left(\frac{1+2i-i'}{1-i-i'}\right).m^2 l^2 + \frac{4.ii'}{1-i-i'}.m^4 = 0,$$

équation qui donne, en la résolvant par approximation,

$$l^2 = m^2.\left[\frac{1+2i-i' \pm (1+2i-i'-8ii')}{2(1-i-i')}\right].$$

On tire de là ces deux valeurs, $l^2 = m^2 + 3im^2$ et $l^2 = 4ii'm^2$; on aura donc, en prenant pour l et l' les deux racines positives de ces équations,

$$l = m + \tfrac{3}{2}im; \quad l' = 2m\sqrt{ii'},$$

ou bien, en remettant pour i et i' les valeurs que ces lettres représentent,

$$l = m - \tfrac{3}{2}m.\left(\frac{A-C}{C}\right), \quad l' = 2m.\frac{\sqrt{(A-C).(B-C)}}{C}.$$

Ces valeurs substituées dans les équations (12) donneront, en observant que i et i' sont de très petites quantités,

$$M' = M, \quad N' = -2\sqrt{\frac{A-C}{B-C}}.N.$$

Les valeurs de s et s' deviendront ainsi

$$s = M\sin(lt+k) + N\sin(l't+k') + P\sin(ht+h') + \text{etc.}$$

$$s' = M\cos(lt+k) + 2.\sqrt{\frac{A-C}{B-C}}.N\cos(lt+k') + P'\cos(ht+h') + \text{etc.}$$

Si, dans une première approximation, on néglige dans les équations différentielles (7), les produits de l'angle $v - \varphi$ par les quantités s, s' et γ, le second membre de la première de ces équations se réduira à $3m^2.\left(\frac{A-C}{B}\right).\gamma\sin(v-\alpha)$ et celui de la deuxième à zéro; $H\sin(ht+h')$ + etc. représentera donc dans ce cas la latitude de la Lune développée en fonction des sinus et des cosinus du moyen mouvement mt. Le terme le plus considérable de cette valeur est celui qui dépend de l'argument de la latitude: en ne considérant que ce seul terme et en le supposant représenté par $H\sin(ht+h')$, on aura les valeurs qui en résultent dans s et s', en faisant $H' = 0$ dans les équations du nº 48, d'où l'on conclura P et P'; les valeurs de s et s' se réduiront ainsi aux suivantes:

$$s = M\sin(lt+k) + N\sin(l't+k') + P\sin(ht+h'),$$

$$s' = M\cos(lt+k) + 2.\sqrt{\frac{A-C}{B-C}}.N\cos(l't+k') + P'\cos(ht+h').$$

50. Examinons maintenant ce qui résulte de ces intégrales par rapport aux déplacemens de l'équateur lunaire.

On a, par le nº 46,

$$s = \operatorname{tang}\theta\sin\varphi, \quad s' = \operatorname{tang}\theta\cos\varphi,$$

d'où l'on tire

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{s}{s'}, \quad \operatorname{tang}\theta = \sqrt{s^2 + s'^2}.$$

Si, à la place de s et s', on substitue leurs valeurs, on aura ainsi

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{\text{M}\sin(lt+k)+\text{N}\sin(l't+k')+\text{P}\sin(ht+h')}{\text{M}\cos(lt+k)+2.\sqrt{\frac{\text{A}-\text{C}}{\text{B}-\text{C}}}.\text{N}\cos(l't+k')+\text{P}'\cos(ht+h')},$$

et en supposant pour abréger

$$\text{N}.\left(\tfrac{1}{2}-\sqrt{\tfrac{\text{A}-\text{C}}{\text{B}-\text{C}}}\right)=\text{L},\quad \text{N}.\left(\tfrac{1}{2}+\sqrt{\tfrac{\text{A}-\text{C}}{\text{B}-\text{C}}}\right)=\text{K},$$

il est aisé de voir, n° 66, livre II, que la valeur précédente pourra prendre cette forme

$$\text{tang}(\varphi-ht-h')=$$
$$\frac{\text{M}\sin[(l-h)t+k-h']+\text{L}\sin[(l'-h)t+k'-h']+\text{K}\sin[(l'+h)t+k'+h']}{\text{P}+\text{M}\cos[(l-h)t+k-h']+\text{L}\cos[(l'-h)t+k'-h']+\text{K}\cos[(l'+h)t+k'+h']}$$

Si l'on suppose d'abord nulles les deux constantes M et N, cette équation donnera

$$\varphi = ht+h' \quad \text{ou} \quad \varphi = 180°+ht+h',$$

selon que P sera une quantité positive ou négative. Voyons quelle est celle de ces deux valeurs qui s'accorde avec les observations.

L'angle $mt+c+\psi$ est la longitude du rayon vecteur mené de la Lune à la Terre, comptée à partir du nœud descendant de l'équateur lunaire; $180°+ht+h'$ est l'argument de la latitude de la Lune, et par conséquent $ht+h'$ la distance de la Terre au nœud ascendant de l'orbe lunaire; $mt+c+\psi-ht-h'$ exprime donc l'angle compris entre le nœud ascendant de l'orbite et le nœud descendant de l'équateur de la Lune. Or, on a, par ce qui précède,

$$\varphi = ht + h' \quad \text{et} \quad \varphi - \psi = mt + c + u,$$

u étant une très petite quantité qui exprime la libration de la Lune en longitude, et qui n'est composée que de termes périodiques. Si l'on néglige ces termes, on aura

$$mt + c + \psi - ht - h' = mt + c + \psi - \varphi = 0;$$

d'où il suit que le lieu moyen du nœud descendant de l'équateur de la Lune coïncidera exactement avec le lieu moyen de l'orbite, résultat qui s'accorde avec la théorie fondée sur les observations faites par Cassini et répétées ensuite par Mayer et Lalande.

Dans le second cas, on a

$$\varphi = 180° + ht + h';$$

on aura donc

$$mt + c + \psi - ht - h' = 180°,$$

et le nœud ascendant de l'équateur lunaire coïncidera par conséquent alors avec le nœud descendant de l'orbite. Ce cas pourrait, comme on voit, avoir également lieu; il suffirait pour cela que P fût une quantité négative; mais comme le premier résultat s'accorde exactement avec les observations, il faut en conclure que la valeur de P est positive.

Considérons actuellement l'expression générale de $\tang(\varphi - ht - h')$. Il est aisé de voir que l'angle $\varphi - ht - h'$ ne pourra jamais atteindre l'angle droit en plus ou en moins, si le dénominateur de cette expression est constamment de même signe et plus

grand que zéro. En sorte que φ sera dans ce cas égal à $ht+h'$ plus ou moins un angle toujours moindre que 90°, et par conséquent la valeur moyenne de φ sera encore alors $ht+h'$. Si, au contraire, ce dénominateur pouvait devenir nul, la valeur de $\text{tang}(\varphi-ht-h')$ deviendrait infinie; l'angle $\varphi-ht-h'$ dépasserait alors 90°, il pourrait même, par la suite, devenir égal à une ou plusieurs circonférences, et il ne serait plus possible par conséquent d'assigner dans ce cas aucune limite à ses accroissemens.

Or, les observations ayant fait voir que le nœud descendant de l'équateur de la Lune ne s'éloigne jamais que très peu du nœud moyen ascendant de son orbite, et qu'ainsi $\varphi-ht-h'$ est toujours un angle peu considérable, il en résulte que l'expression

$$P+M.\cos[(l-h).t+k-h']+L.\cos[(l'-h).t+k'-h']+K.\cos[l'+h).t+k'+h']$$

ne doit jamais devenir nulle, quels que soient les angles $(l-h)t+k-h'$, etc., ce qui exige que cette quantité ne change pas de signes, et que par conséquent la valeur de P soit plus grande que la somme des coefficiens M, L, K, abstraction faite des signes de ces quantités. Nous avons vu que lorsque M, L, K sont nuls, P doit être une quantité positive; il faut donc, dans le cas général, que P ait une valeur positive plus grande que la somme des valeurs de M, L, K, pour que $\varphi-ht-h'$ soit un angle toujours moindre que l'angle droit; et il faut en outre que les quantités M, L, K, et par conséquent M et N, soient très petites par rapport à P, pour que l'angle

et en déduire, comme nous l'avons fait relativement à l'expression de la libration en longitude, les données qu'elles fournissent sur la constitution du sphéroïde lunaire. Il est évident d'abord que pour que les valeurs de s et s' demeurent constamment très petites, comme les observations l'indiquent, il faut que les coefficiens M, N, M', N', P et P' soient très petits, et que de plus, les coefficiens l, l', h, etc., soient réels. Or, les quantités h, etc., sont réelles de leur nature; mais pour que les valeurs de l et l' le soient aussi, il faut que les racines de l'équation (10) soient non-seulement réelles, mais encore positives, ce qui donne les trois équations de condition suivantes :

$$(A+B-C)^2-4.(A-C).A-(B-C).B>0,$$
$$(A+B-C)^2-4.(A-C).A+(A-B).B>16.(A-C).(B-C).AB,$$
$$(A-C).(B-C)>0.$$

Si l'une de ces conditions n'était pas satisfaite, les valeurs de s et s' renfermeraient le temps t hors des signes sinus et cosinus, et pourraient augmenter indéfiniment, ce qui est contraire aux phénomènes observés. La dernière montre que le produit (A—C).(B—C) doit toujours être positif, ce qui exige que C soit le plus grand ou le plus petit des trois momens d'inertie A, B, C. Or, C est le moment d'inertie qui se rapporte au troisième axe principal de la Lune, celui autour duquel elle tourne; il est donc naturel de supposer qu'il est plus grand que les momens d'inertie A, B, qui se rapportent aux axes principaux situés dans l'équateur,

puisque la Lune a dû nécessairement s'aplatir dans le sens des pôles par l'effet du mouvement de rotation. Nous avons déjà vu, n° 44, que B — A doit être une quantité positive pour que la libration de la Lune en longitude soit toujours peu considérable; C est donc le plus grand, et A le plus petit des trois momens d'inertie du sphéroïde lunaire.

52. Reprenons les équations (S), n° 46; en remarquant que α est un fort petit angle, on peut les écrire ainsi :

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2s}{dt^2} - \frac{(A+B-C)}{B}.m\frac{ds'}{dt} - \left(\frac{A-C}{B}\right).m^2s &= \frac{3L}{r^3}.\left(\frac{A-C}{B}\right).(\theta+\gamma).\sin(v-\alpha).\cos(v-\varphi), \\ \frac{d^2s'}{dt^2} - \frac{(A+B-C)}{A}.m\frac{ds}{dt} - \left(\frac{B-C}{A}\right).m^2s' &= \frac{3L}{r^3}\left(\frac{B-C}{A}\right).(\theta+\gamma).\sin(v-\alpha).\sin(v-\varphi). \end{aligned}\right\} (13)$$

Les seuls termes de ces expressions qui puissent devenir sensibles sont ceux qui dépendent de l'argument moyen de la latitude, à raison de leur grandeur, et ceux qui acquièrent par l'intégration de très petits diviseurs, circonstance qui peut les rendre considérables, quoique très petits par eux-mêmes. Voyons ce que deviennent dans ces deux cas les quantités que nous avons désignées généralement par P et P'. Si, dans une première approximation, on néglige les termes des seconds membres des équations précédentes qui dépendent des angles θ et $v-\varphi$ qui sont de très petites quantités, le second membre de la première des équations (13) se réduit à

$$3m^2.\left(\frac{A-C}{B}\right).\gamma\sin(v-\alpha),$$

et celui de la seconde à zéro.

On a vu, n° 48, que $\gamma \sin(v - \alpha)$ représente la tangente de la latitude de la Terre vue de la Lune, et α la longitude du nœud ascendant de l'orbe lunaire comptée d'une ligne fixe. Ce point a un mouvement rétrograde sur le plan de l'écliptique fixe, et en désignant par $-amt + g$ la partie moyenne de ce mouvement qu'il nous suffira de considérer ici, et substituant pour v la longitude moyenne $mt + c$ de la Terre vue de la Lune, on aura

$$\gamma \sin(v - \alpha) = \gamma \sin[(1 + a)mt + \epsilon].$$

Nous avons représenté, n° 48, par $\Sigma . \mathrm{H} \sin(ht + h')$ la somme des termes périodiques du second membre de la première des équations (7); en supposant donc que $\mathrm{H} \sin(ht + h')$ est le terme de cette suite que nous considérons, on aura

$$\mathrm{H} = \gamma, \quad h = (1 + a)\, m,$$

a étant une très petite quantité dont on peut négliger le carré. Si l'on substitue cette valeur de h dans D, et qu'on néglige les termes de l'ordre a^2, on pourra lui donner cette forme

$$\mathrm{D} = -\frac{\mathrm{A} + \mathrm{B} - \mathrm{C}}{\mathrm{AB}} . [2\mathrm{C}a + 3.(\mathrm{A} - \mathrm{C})] . m^4 - 6\mathrm{A} . \left(\frac{\mathrm{A} - \mathrm{C}}{\mathrm{B}}\right) . am^4.$$

On peut négliger le dernier terme de cette expression, à cause de la petitesse de ses deux facteurs, et en faisant $\mathrm{H}' = 0$ dans les valeurs de P et P′, on aura, à très peu près,

$$\mathrm{P} = \mathrm{P}' = \frac{3.(\mathrm{C} - \mathrm{A}).\gamma}{2\mathrm{C}a - 3.(\mathrm{C} - \mathrm{A})}.$$

Tous les termes des valeurs de s et s' qui acquièrent de petits diviseurs par l'intégration, ont été discutés avec soin, en tenant compte des principales inégalités de la Lune du premier et du second ordre, par rapport à l'inclinaison et à l'excentricité de son orbite, et l'on a reconnu que le seul d'entre eux qui puisse devenir sensible est celui qui dépend de la longitude du périgée lunaire. L'inégalité qui en résulte a une période d'environ six années; elle dépend de la seconde approximation, c'est-à-dire qu'elle est du second ordre par rapport aux quantités θ, γ et e, en désignant par e l'excentricité de l'orbe lunaire. Pour la déterminer, reprenons les équations (13); en remarquant que α, désignant la longitude du nœud ascendant de l'orbite de la Lune, comptée du nœud descendant de son équateur, est un très petit angle dont on peut faire abstraction, on aura

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2s}{dt^2}-\frac{(A+B-C)}{B}.m\frac{ds'}{dt}-\left(\frac{A-C}{B}\right).m^2s&=\frac{3L}{r^3}.\left(\frac{A-C}{B}\right)(\theta+\gamma).\sin v.\cos(v-\varphi),\\ \frac{d^2s'}{dt^2}-\frac{(A+B-C)}{A}.m\frac{ds}{dt}-\left(\frac{B-C}{A}\right).m^2s&=\frac{3L}{r^3}.\left(\frac{B-C}{A}\right).(\theta+\gamma).\sin v.\sin(v-\varphi).\end{aligned}\right\}(1$$

Par les formules du mouvement elliptique, on a

$$\frac{r}{a}=1-e\cos(mt+c-\omega),$$
$$v=mt+c-\Pi+2e\sin(mt+c-\omega),$$

e étant l'excentricité et Π la longitude du nœud ascendant de l'orbe lunaire, $mt+c$ la longitude moyenne de la Terre vue de la Lune, et ω la longitude du périgée de l'orbite qu'elle est supposée décrire, ces trois

longitudes étant comptées sur le plan de l'écliptique à partir d'une ligne fixe. De ces équations, en n'ayant égard qu'aux termes qui dépendent de la première puissance de e, on tire

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{a^3}.[1 + 3e\cos(mt + c - \omega)],$$

$$\sin v = \sin(mt + c - \Pi) + 2e\cos(mt + c -)\sin(mt + c - \omega).$$

On peut d'ailleurs, comme $v - \varphi$ est un très petit arc, négliger son carré dans les seconds membres des équations (14), ou, ce qui revient au même, le substituer à la place de son sinus, et supposer son cosinus égal à l'unité. Or, l'expression de cet arc contient, d'après le nº 43, le terme $2e\sin(mt + c - \omega)$; on aura donc

$$\cos(v - \varphi) = 1, \quad \sin(v - \varphi) = 2e\sin(mt + c - \omega).$$

En vertu des valeurs précédentes, le second membre de la première des équations (14), en ne considérant que les termes de l'ordre des excentricités de l'orbe lunaire, devient

$$\frac{3L}{a^3}.\left(\frac{A-C}{B}\right).(\theta + \gamma).[2e\cos(mt + c - \Pi)\sin(mt + c - \omega) + 3e\sin(mt + c - \Pi)],$$

ou bien, en négligeant les termes périodiques,

$$\frac{3L}{a^3}.\left(\frac{A-C}{2B}\right).(\theta + \gamma).e\sin(\omega - \Pi).$$

On verra, de la même manière que le second membre de la deuxième de ces équations se réduit à

$$\frac{3L}{a^3}.\left(\frac{B-C}{A}\right).(\theta + \gamma).[2e\sin(mt + c - \Pi).\sin(mt + c - \omega)],$$

ce qui donne, en négligeant la partie périodique, le terme

$$\frac{3L}{a^3}\cdot\left(\frac{B-C}{A}\right).(\theta+\gamma).e\cos(\omega-\Pi).$$

Il faut substituer ces valeurs dans les équations (14); mais pour ne rien laisser à désirer sur cet article, nous observerons que $\gamma\sin(v-\alpha)$ exprime, n° 52, la latitude de la Terre vue de la Lune, qui est égale et de signe contraire à la latitude de la Lune. Or, l'expression de cette dernière latitude contient, dans la partie qui est due à la force perturbatrice, une inégalité de cette forme

$$-\tfrac{1}{2}e\gamma.K.\sin(\omega-\Pi),$$

laquelle produira, dans le second membre de la première des équations (14), le terme suivant :

$$\frac{3L}{a^3}\cdot\left(\frac{A-C}{2B}\right).e\,\gamma.K.\sin(\omega-\Pi),$$

qu'il faudra joindre au terme déterminé plus haut. Les équations (14), en observant qu'on a $m^2=\frac{L}{a^3}$, deviendront ainsi

$$\frac{d^2s}{dt^2}-\frac{(A+B-C)}{B}.m\frac{ds'}{dt}-\left(\frac{A-C}{B}\right).m^2s=3m^2.\left(\frac{A-C}{2B}\right).[\theta+\gamma.(1+K)].e\sin(\omega-\Pi),$$
$$\frac{d^2s'}{dt^2}+\frac{(A+B-C)}{B}.m\frac{ds}{dt}-\left(\frac{B-C}{A}\right).m^2s'=3m^2.\left(\frac{B-C}{A}\right).(\theta+\gamma).e\cos(\omega-\Pi).$$

L'action du Soleil fait varier les nœuds et le périgée de l'orbite lunaire; le mouvement du périgée est direct; désignons par $bmt+f$ sa longitude moyenne

mptée à partir d'une ligne fixe; le mouvement des euds étant rétrograde, soit comme précédemment $amt+g$ la longitude moyenne du nœud ascendant mptée de la même ligne; ω représentant la longide de l'orbite de la Terre vue de la Lune, est al à la longitude de l'orbe lunaire augmentée d'une mi-circonférence; on aura donc ainsi

$$\omega - \Pi = (a+b).mt + f - g + 180°.$$

l'on substitue cette valeur dans les équations difentielles précédentes et que pour y satisfaire on ppose

$$s = \text{P}.\sin[(a+b).mt+f-g],$$
$$s' = \text{P}'.\cos[(a+b).mt+f-g],$$

et b étant de petites quantités dont on peut négliger carrés et les produits par $\frac{\text{A}-\text{C}}{\text{B}}$ et $\frac{\text{B}-\text{C}}{\text{A}}$, on trouvera, à très peu près,

$$= \frac{3.\left(\frac{\text{C}-\text{B}}{\text{A}}\right).(\theta+\gamma).e}{a+b},\ \text{P}' = \frac{3.\left(\frac{\text{C}-\text{A}}{2\text{B}}\right).[\theta+\gamma.(1+\text{K})].e}{a+b},$$

aura donc, en vertu des deux termes que nous nons de considérer, pour les valeurs complètes de et de s',

$$s = \frac{3.(\text{C}-\text{A}).\gamma}{2\text{C}a-3(\text{C}-\text{A})}.\sin[(1+a)mt+\epsilon]$$
$$+3.\left(\frac{\text{C}-\text{B}}{\text{A}}\right).\frac{\theta+\gamma}{a+b}.e\sin[(a+b)mt+f-g],$$

$$s' = \frac{3.(C-A).\gamma}{2Ca-3(C-A)}.\cos[(1+a)mt+\mathcal{E}]$$
$$+3.\left(\frac{C-A}{2B}\right).\frac{[\theta+\gamma.(1+K)]}{a+b}.e\cos[(a+b)mt+f-g].$$

53. Si l'on élève au carré ces valeurs et qu'on les substitue ensuite dans l'équation $\operatorname{tang}\theta = \sqrt{s^2+s'^2}$, en négligeant les produits de trois dimensions, par rapport à e, θ et γ, on aura

$$\theta = \frac{3.(C-A).\gamma}{2Ca-3(C-A)} + 3.\left(\frac{C-B}{A}\right).\left(\frac{\theta+\gamma}{a+b}\right).e\sin[(1+a)mt+\mathcal{E}].\sin[(a+b)mt+f-g]$$
$$+3.\left(\frac{C-A}{2B}\right).\left(\frac{\theta+\gamma(1+K)}{a+b}\right).e\cos[(1+a)mt+\mathcal{E}].\cos[(a+b)mt+f-g]).$$

Comparons cette valeur aux observations. En ne considérant d'abord que son premier terme, on a

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{3.(C-A).\gamma}{2Ca-3(C-A)}. \qquad (15)$$

Mayer, par des observations faites en 1749, avait trouvé l'inclinaison de l'équateur lunaire égale à $1°\,29'$. MM. Bouvard et Nicollet, par des observations renouvelées dans ces derniers temps et que nous avons déjà citées, ont réduit cette inclinaison à $1°\,28'\,45''$; résultat qui ne diffère que de $15''$ de celui de Mayer, et qui démontre avec évidence l'invariabilité de l'inclinaison moyenne. Nous supposerons donc $\theta = 1°\,28'45''$; on a d'ailleurs par la théorie de la Lune,

$$\gamma = 5°\,8'\,49'', \quad a = 0.004022.$$

On aura donc, au moyen de l'équation (15),

$$3.\left(\frac{C-A}{C}\right)=\frac{2a+\theta}{\theta+\gamma}=0.0017972.$$

Or, d'après l'ordre de grandeur des trois quantités A, B, C, on a

$$\frac{B-A}{C}<\frac{C-A}{C}.$$

La première de ces deux quantités est donc moindre que 0.0006, comme nous l'avons supposé n° 45.

Reprenons maintenant la valeur complète de tang θ; en ne considérant que les termes dont nous avons d'abord fait abstraction, et négligeant, comme nous le faisons, le carré de θ, on en tire

$$\begin{aligned}\tang\theta=&3.\left(\frac{C-B}{A}\right).\frac{\theta+\gamma}{a+b}.e\sin[(1+a)mt+\epsilon].\sin[(a+b)mt+f-g]\\&+3.\left(\frac{C-A}{2B}\right).\frac{\theta+\gamma(1+K)}{a+b}.e\cos[(1+a)mt+\epsilon].\cos[(a+b)mt+f-g],\end{aligned}$$

équation dans le second membre de laquelle on substituera pour θ sa valeur donnée par l'équation (15).

Les deux inégalités que cette expression renferme ont pour limites leurs coefficiens, et l'on peut en calculer approximativement les valeurs. En effet, on a, par ce qui précède,

$$\theta=0.2879.\gamma,\quad \gamma=5^\circ 8' 49'',$$

et par la théorie de la Lune,

$$e=0.05487,\quad a=0.004022,$$
$$b=0.008452,\quad K=0.039106.$$

En supposant donc pour un moment,

$$\frac{C-A}{B}=\frac{C-A}{C}=0.00059907,$$

on aura

$$3.\left(\frac{C-A}{2B}\right).\left(\frac{\frac{\theta}{\gamma}+1+K}{a+b}\right).e\gamma=1'37'',188.$$

Ainsi, le *maximum* de la seconde inégalité de θ ne s'élèvera pas à $1'\,37''$, c'est-à-dire à la cinquantième partie environ de l'inclinaison moyenne.

Le *maximum* de la première inégalité ne saurait être déterminé rigoureusement, parce que la valeur de $\frac{C-B}{A}$ est encore inconnue; mais on peut en fixer la limite en observant que l'on a

$$\frac{C-B}{A}<\frac{C-A}{B};$$

d'où il suit que la première inégalité est moindre dans son *maximum* que le double de la seconde, c'est-à-dire qu'elle est au-dessous de $\frac{1}{25}$ de l'inclinaison moyenne de l'équateur lunaire à l'écliptique.

54. Les valeurs de s et de s' produisent deux inégalités semblables aux précédentes, dans la valeur de φ, et par suite, dans l'expression de la distance du nœud descendant de l'équateur lunaire au nœud ascendant de l'orbite. En effet, en ne considérant que le premier terme de ces valeurs, on a

$$\operatorname{tang}\varphi=\frac{s}{s'}=\operatorname{tang}.[(1+a)mt+c-g],$$

d'où l'on tire

$$\varphi = (1 + a)\,mt + c - g.$$

On a d'ailleurs, en faisant abstraction de la libration en longitude qui est très petite,

$$\psi = \varphi - mt - c;$$

on aura donc

$$\psi = amt - g,$$

c'est-à-dire que le nœud de l'équateur lunaire coïncide avec le nœud de l'orbite, comme nous l'avons démontré généralement n° 50. Considérons maintenant les termes du second ordre des valeurs de s et s'; faisons pour abréger,

$$\zeta = -\psi + amt - g.$$

En sorte que ζ exprime l'angle compris entre le nœud de l'équateur de la Lune et le nœud de son orbite compté sur le plan parallèle à l'écliptique, et dans l'ordre des signes. On aura, en mettant pour ψ sa valeur

$$\zeta = (1 + a)\,mt + c - g - \varphi,$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned}\text{tang}\,\theta.\sin\zeta &= \text{tang}\,\theta.\sin[(1 + a)\,mt + c - g - \varphi)] \\ &= s'\sin[(1 + a)mt + c - g] - s\cos[(1 + a)mt + c - g].\end{aligned}$$

Si l'on substitue pour s et s' leurs valeurs, qu'on divise ensuite l'équation résultante par la valeur de tang θ et qu'on néglige les puissances de e supérieures à la première, ce qui permet de mettre l'arc ζ à la place de son sinus, on aura

$$\zeta = 3.\left(\frac{C-B}{A}\right).\frac{(\theta+\gamma)e}{(a+b)\theta}.\cos[(1+a)mt+c-g].\sin[(a+b)mt+f-g]$$
$$-3.\left(\frac{C-A}{2B}\right).\frac{[\theta+\gamma(1+K)]e}{(a+b)\theta}.\sin[(1+a)mt+c-g].\cos[(a+b)mt+f-g]$$

On peut calculer le coefficient de la seconde de ces deux inégalités; en effet, si l'on suppose $3.\left(\frac{C-A}{2B}\right) = 0.0008986$, au moyen des valeurs de e, a, b, θ, γ, B, données précédemment, on trouvera 1° 2′ 45″ pour la valeur de ce coefficient, d'où l'on voit qu'en vertu de la seconde des inégalités de ζ, les nœuds de l'équateur et de l'orbite lunaires peuvent s'écarter l'un de l'autre de plus d'un degré. Le *maximum* de la seconde inégalité ne peut encore se déterminer, parce qu'on ignore, comme nous l'avons dit, la valeur de $\frac{C-B}{A}$, mais on est assuré qu'il ne saurait surpasser le double de la seconde, c'est-à-dire environ deux degrés. Mayer avait trouvé par ses observations $\zeta = -3°36'$; MM. Bouvard et Nicollet ont conclu des leurs $\zeta = 1°48'$. On peut attribuer la différence des deux résultats, en partie aux erreurs des observations, et en partie aux variations que subit la quantité ζ en vertu des inégalités qu'elle renferme.

55. M. Nicollet, d'après les derniers calculs qu'il a faits sur les observations de M. Bouvard, a trouvé l'inclinaison moyenne de l'équateur lunaire sur l'écliptique de 1° 28′ 42″, valeur un peu plus grande que celle que nous avions d'abord adoptée; on en a déduit

$$\frac{3(C-A)}{B}=0.000178.$$

Au moyen de cette valeur et de celle de $\frac{B-A}{C}$ rapportée n° 45, on conclut, à très peu près,

$$\frac{3(C-B)}{A}=0.00012.$$

Si à l'aide de ces valeurs et de celles que nous avons rapportées plus haut, pour les quantités a, b, θ, e, etc., on réduit en nombres les coefficiens des inégalités des expressions précédentes de θ et de ζ, en faisant pour abréger

$$D=(1+a)mt+c-g, \quad E=(a+b)mt+f-g,$$

on trouve

$$\theta=1^\circ\,28'\,42''+13''\sin D\sin E+97''\cos D\cos E,$$
$$\zeta=\quad 447''\cos D\sin E-3721''\sin D\cos E.$$

Dans ces formules, θ représente l'inclinaison vraie de l'équateur lunaire sur l'écliptique, ζ la distance du nœud descendant de l'équateur de la Lune au nœud ascendant de son orbite. D est la distance moyenne de la Lune à son nœud ascendant et E celle de son périgée à ce même nœud.

56. Nous avons dit, n° 42, que la position des pôles n'était pas stable à la surface de la Lune; il est aisé de déterminer maintenant les variations qu'ils éprouvent.

En effet, si, à l'aide des données précédentes, on convertit en nombre les coefficiens des expres-

sions de s et de s', n° 52, on trouve

$$s = (1^\circ\, 28'\, 42''). \sin D + 13'' \sin E,$$
$$s' = (1^\circ\, 28'\, 42''). \cos D + 97'' \cos E,$$

d'où en différenciant et observant que l'on a
$\frac{dD}{mdt} = 1 + a = 1.00402$, $\frac{dE}{mdt} = a + b = 0.01247$,
on tire

$$\frac{ds}{mdt} = (1^\circ\, 28'\, 63''). \cos D + 0'',3 \cos E,$$
$$\frac{ds'}{mdt} = -(1^\circ\, 28'\, 63''). \sin D - 1'' \sin E.$$

Les équations (6) donnent

$$s + \frac{ds'}{mdt} = -\frac{p}{m}, \quad s' - \frac{ds}{mdt} = -\frac{q}{m};$$

on aura donc

$$\frac{p}{m} = 21'' \sin D - 12'' \sin E,$$
$$\frac{q}{m} = 21'' \cos D - 97'' \cos E.$$

Si l'on nomme δ l'angle que forme l'axe instantané de rotation de la Lune avec l'axe auquel se rapporte le plus grand moment d'inertie C, $\frac{\sqrt{p^2+q^2}}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$ exprimera généralement, n° 1, le sinus de cet angle; on aura donc, à très peu près,

$$\delta = \frac{\sqrt{p^2+q^2}}{m}.$$

En substituant pour p et q leurs valeurs, on verra

que la plus grande valeur de l'angle δ serait de 2′ 36″, en sorte que les pôles de rotation de la Lune peuvent faire autour des pôles de son équateur des excursions dont l'étendue, dans son *maximum*, est de 2′ 36″.

57. Nous avons rapporté jusqu'ici les mouvemens de l'équateur lunaire à une écliptique fixe; il resterait, pour compléter la théorie de la libration de la Lune, à considérer les mouvemens de ce plan relativement à l'écliptique mobile. Mais il est aisé de se convaincre, par une analyse très simple, que les équations qui déterminent la position de l'équateur lunaire sont absolument de même forme, soit qu'on la rapporte à l'écliptique fixe ou à l'écliptique mobile, pourvu qu'on rapporte au même plan la position de la Lune dans son orbite; d'où l'on peut conclure que les lois des phénomènes qui dépendent des mouvemens de son équateur sont les mêmes dans les deux cas. Pour se rendre raison de ce résultat, il faut concevoir que l'attraction de la Terre sur le sphéroïde lunaire, ramenant sans cesse l'équateur et l'orbite de la Lune au même degré d'inclinaison sur l'écliptique vraie, la constance de l'inclinaison mutuelle de ces deux plans, et la coïncidence de leurs nœuds, n'éprouvent aucune altération des déplacemens séculaires de l'écliptique. Enfin, nous n'avons pas tenu compte, dans la théorie précédente, de l'action du Soleil sur le sphéroïde lunaire, parce que toutes les recherches qu'on a faites à cet égard ont prouvé que cette action n'a aucune influence sensible sur les mouvemens de la Lune autour de son centre de gravité.

CHAPITRE PREMIER.

Formules générales pour déterminer les attractions des sphéroïdes de figure quelconque.

1. Soit dm l'un quelconque des élémens du sphéroïde; nommons f sa distance au point attiré; $\frac{dm}{f^2}$ exprimera l'action qu'il exerce sur ce point, et en multipliant cette expression par les cosinus des angles que forme la droite f avec chacun des axes coordonnés, on aura les trois composantes de cette force, respectivement parallèles à ces axes. Soient x, y, z, les coordonnées de l'élément dm, rapportées à trois axes rectangulaires passant par le centre du sphéroïde, et a, b, c les coordonnées du point attiré relatives aux mêmes axes, on aura

$$f = \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2}.$$

On peut regarder l'élément dm comme un petit parallélépipède rectangulaire dont les dimensions sont dx, dy, dz; en nommant donc ρ sa densité, ρ étant une fonction des coordonnées x, y, z variable suivant une loi quelconque, on aura

$$dm = \rho dxdydz.$$

Cela posé, désignons par A, B, C les attractions exercées par le sphéroïde parallèlement aux axes des x, des y et des z, et dirigées vers l'origine des coordonnées, on aura

$$\left.\begin{aligned} A &= \iiint \frac{\rho.(a-x).dxdydz}{[(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2]^{\frac{3}{2}}}, \\ B &= \iiint \frac{\rho.(b-y).dxdydz}{[(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2]^{\frac{3}{2}}}, \\ C &= \iiint \frac{\rho.(c-z).dxdydz}{[(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2]^{\frac{3}{2}}}; \end{aligned}\right\}(A)$$

les triples intégrales se rapportant aux variables x, y, z, qui fixent la position de dm, et devant s'étendre à la masse entière du sphéroïde.

On voit par ces formules que si l'on désigne par V la fonction qui exprime la somme des élémens du sphéroïde, divisés respectivement par leur distance au point attiré, en sorte qu'on ait

$$V = \iiint \frac{\rho dxdydz}{[(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2]^{\frac{1}{2}}},$$

les intégrales devant être étendues à la masse entière du sphéroïde, la fonction V aura cette propriété remarquable, que ses trois différences partielles, prises par rapport aux coordonnées a, b, c du point attiré, donneront immédiatement les valeurs de A, B, C. En effet, les intégrations n'étant relatives qu'aux coordonnées x, y, z, on a évidemment

$$A = -\frac{dV}{da}, \quad B = -\frac{dV}{db}, \quad C = -\frac{dV}{dc}.$$

Si la valeur de V était connue, on aurait donc, par une simple différentiation, celles de A, B, C. Généralement, pour avoir l'attraction qu'exerce le sphéroïde sur le point attiré parallèlement à une droite quelconque, il suffira de regarder V comme fonction de trois coordonnées rectangulaires dont l'une soit parallèle à cette droite; le coefficient de la différentielle de V, relative à cette coordonnée et prise avec un signe contraire, exprimera l'action qu'exerce le le sphéroïde parallèlement à la droite donnée, et dirigée vers l'origine des coordonnées.

2. La fonction V jouit encore d'une propriété importante, c'est que si on la différencie une seconde fois, par rapport aux coordonnées a, b, c et qu'on ajoute les coefficiens de ses trois différences partielles, cette somme sera constamment égale à zéro. En effet, en représentant, comme précédemment, par f la fonction $[(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2]^{\frac{1}{2}}$, on aura

$$V = \iiint \frac{\rho dxdydz}{f},$$

l'intégration devant s'étendre à la masse entière du sphéroïde. Les signes $\int$ n'étant relatifs qu'aux variables x, y, z, il est évident qu'on aura

$$\frac{d^2V}{da^2} + \frac{d^2V}{db^2} + \frac{d^2V}{dc^2} = \iiint \rho dxdydz.\left(\frac{d^2.\frac{1}{f}}{da^2} + \frac{d^2.\frac{1}{f}}{db^2} + \frac{d^2.\frac{1}{f}}{dc^2}\right).$$

Or, en différenciant deux fois la valeur de $\frac{1}{f}$, on trouve

$$\frac{d^2.\frac{1}{f}}{da^2}=\frac{2(x-a)^2-(y-b)^2-(z-c)^2}{f^5},$$

$$\frac{d^2.\frac{1}{f}}{db^2}=\frac{2(y-b)^2-(x-a)^2-(z-c)^2}{f^5},$$

$$\frac{d^2.\frac{1}{f}}{dc^2}=\frac{2(z-c)^2-(x-a)^2-(y-b)^2}{f^5},$$

d'où l'on tire

$$\frac{d^2.\frac{1}{f}}{da^2}+\frac{d^2.\frac{1}{f}}{db^2}+\frac{d^2.\frac{1}{f}}{dc^2}=0\,;$$

on aura donc, par conséquent,

$$\frac{d^2V}{da^2}+\frac{d^2V}{db^2}+\frac{d^2V}{dc^2}=0. \qquad (1)$$

Cette équation remarquable a été découverte par Laplace, qui en a fait la base de sa belle théorie de la figure des corps célestes. Elle a lieu rigoureusement toutes les fois que le point attiré est situé au dehors du sphéroïde ou dans l'intérieur d'un sphéroïde creux; mais elle cesse de subsister lorsque le point attiré fait partie de la masse du sphéroïde, parce que, dans ce cas, la distance f devenant nulle entre les limites de l'intégrale $\int\frac{dm}{f}$, la somme des trois différences partielles de $\frac{1}{f}$ se réduit à la forme

de $\frac{0}{0}$, et elle n'est plus nulle par conséquent pour toutes les valeurs de x, y, z. M. Poisson est le premier qui ait fait remarquer ce cas d'exception de l'équation (1).

3. Pour déterminer dans ce cas la valeur de la fonction $\frac{d^2V}{da^2} + \frac{d^2V}{db^2} + \frac{d^2V}{dc^2}$, supposons une sphère, décrite de l'origine des coordonnées et d'un rayon quelconque, qui embrasse le point attiré et soit comprise tout entière dans le sphéroïde. La fonction V se partagera alors en deux parties U et U', la première relative à la sphère, la seconde à l'excès du sphéroïde sur la sphère. Le point attiré se trouvant situé dans l'intérieur de ce sphéroïde, la fonction $\frac{d^2U'}{da^2} + \frac{d^2U'}{db^2} + \frac{d^2U'}{dc^2}$ sera nulle, d'après ce qui précède; on aura donc simplement

$$\frac{d^2V}{da^2} + \frac{d^2V}{db^2} + \frac{d^2V}{dc^2} = \frac{d^2U}{da^2} + \frac{d^2U}{db^2} + \frac{d^2U}{dc^2}.$$

Or, les trois quantités $\frac{dU}{da}$, $\frac{dU}{db}$, $\frac{dU}{dc}$, prises avec un signe contraire, représentent les attractions qu'exerce la sphère sur le point dont les coordonnées sont a, b, c, et qui est intérieur à sa surface; on trouve, dans ce cas, par l'intégration directe, n° 19, livre I[er],

$$-\frac{dU}{da} = \frac{4\pi\rho a}{3}, \quad -\frac{dU}{db} = \frac{4\pi\rho b}{3}, \quad -\frac{dU}{dc} = \frac{4\pi\rho c}{3};$$

π désignant la demi-circonférence dont le rayon est l'unité, et ρ la densité du sphéroïde. En différentiant les valeurs précédentes, on trouve que la fonction

$\frac{d^2U}{da^2}+\frac{d^2U}{db^2}+\frac{d^2U}{dc^2}$ est égale à $-4\pi\rho$; on aura donc

$$\frac{d^2V}{da^2}+\frac{d^2V}{db^2}+\frac{d^2V}{dc^2}=-4\pi\rho. \quad (2)$$

Nous avons supposé dans ce qui précède le sphéroïde homogène; mais cette équation subsisterait encore pour les sphéroïdes hétérogènes, composés de couches très minces superposées les unes aux autres, pourvu qu'on y substitue pour ρ la valeur de la densité qui convient à la portion du sphéroïde où se trouve le point attiré. En effet, on peut alors regarder le sphéroïde comme composé de trois parties, la couche qui comprend le point attiré, et les couches qui l'enveloppent ou qui sont au-dessous de lui. Ces deux dernières parties du sphéroïde n'influent pas sur le second membre de l'équation (2); cette équation subsiste donc, puisque la partie restante forme un sphéroïde homogène dont ρ représente la densité. Le même résultat peut aisément s'étendre à un sphéroïde dans lequel la densité varierait d'une manière continue. Concluons donc que les équations (1) et (2) ont lieu pour des sphéroïdes de forme et de densité quelconques : la première, toutes les fois que le point attiré ne fait pas partie de la masse du corps; la seconde, dans le cas contraire.

4. On peut, par une simple transformation des coordonnées $a, b, c,$ donner à ces équations d'autres formes plus commodes dans diverses circonstances. Supposons, par exemple, que l'on désigne par r le rayon mené de l'origine des coordonnées au point attiré,

par θ l'angle que forme ce rayon avec l'un des axes coordonnés, avec l'axe des x par exemple, et par ω l'angle que forme la projection de r sur le plan des y, z avec l'axe des y; on aura

$$a = r\cos\theta,\quad b = r\sin\theta\cos\omega,\quad c = r\sin\theta\sin\omega. \quad (3)$$

Nommons r', θ', ω', ce que deviennent r, θ, ω, par rapport à l'élément dm; on aura de même

$$x = r'\cos\theta',\quad y = r'\sin\theta'\cos\omega',\quad z = r'\sin\theta'\sin\omega';$$

de là on tire

$$f = \sqrt{r^2 - 2rr'.[\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\omega - \omega')] + r'^2}.$$

On peut d'ailleurs considérer dm comme un petit parallélépipède rectangulaire, dont les trois dimensions sont dr', $r'd\theta'$, $r'\sin\theta' d\omega'$, et dont la densité est ρ; l'expression de V deviendra donc ainsi

$$V = \iiint \frac{\rho r'^2 dr' \sin\theta' d\theta' d\omega'}{\sqrt{r^2 - 2rr'.[\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\omega - \omega')] + r'^2}},$$

l'intégrale relative à r' devant être prise depuis $r' = 0$ jusqu'à la valeur de r' à la surface du sphéroïde; l'intégrale relative à θ, depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = \pi$, et l'intégrale relative à ω, depuis $\omega = 0$ jusqu'à $\omega = 2\pi$; en représentant toujours par π la demi-circonférence dont le rayon est l'unité.

Si l'on désigne par A, B, C les trois composantes de l'action du sphéroïde sur le point attiré: la première dirigée suivant le rayon r; l'autre, suivant une perpendiculaire à ce rayon, menée dans le plan de θ; la

troisième, suivant une perpendiculaire à ce plan; d'après ce que nous avons dit n° 1, on aura

$$A = -\frac{dV}{dr}, \quad B = -\frac{dV}{rd\theta}, \quad C = -\frac{dV}{r\sin\theta d\varpi}.$$

Ces diverses formules sont de la plus grande utilité dans la théorie des attractions des sphéroïdes, où l'on est sans cesse obligé d'employer les coordonnées polaires pour rendre les intégrations praticables.

Cela posé, des équations (3) on tire

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}, \quad \cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad \operatorname{tang}\varpi = \frac{c}{b}. \quad (4)$$

On transformera, au moyen de ces valeurs, les différences partielles $\frac{d^2V}{da^2}$, $\frac{d^2V}{db^2}$, $\frac{d^2V}{dc^2}$, en différences partielles relatives aux variables r, θ, ϖ, et on les substituera ensuite dans l'équation (1). Pour faciliter cette opération, observons que si l'on regarde V comme fonction des variables a, b, c, et ensuite comme fonction des variables r, θ et ϖ, on aura

$$\frac{dV}{da}.da + \frac{dV}{db}.db + \frac{dV}{dc}.dc = \frac{dV}{dr}.dr + \frac{dV}{d\theta}.d\theta + \frac{dV}{d\varpi}.d\varpi;$$

équation qui doit devenir identique, en y substituant pour dr, $d\theta$, $d\varpi$, leurs valeurs tirées des équations (4). Si, après avoir opéré cette substitution, on compare les coefficiens de da, db, dc, dans les deux membres, on trouvera

$$\frac{dV}{da} = \cos\theta.\frac{dV}{dr} - \frac{\sin\theta}{r}.\frac{dV}{d\theta},$$

$$\frac{dV}{db} = \sin\theta\cos\omega \cdot \frac{dV}{dr} + \frac{\cos\theta\cos\omega}{r} \cdot \frac{dV}{d\theta} - \frac{\sin\omega}{r\sin\theta} \cdot \frac{dV}{d\omega},$$

$$\frac{dV}{dc} = \sin\theta\sin\omega \cdot \frac{dV}{dr} + \frac{\cos\theta\sin\omega}{r} \cdot \frac{dV}{d\theta} + \frac{\cos\omega}{r\sin\theta} \cdot \frac{dV}{d\omega}.$$

On différenciera de nouveau ces expressions par les mêmes procédés, et l'on aura ainsi les valeurs de $\frac{d^2V}{da^2}$, $\frac{d^2V}{db^2}$, $\frac{d^2V}{dc^2}$ en différences partielles de V, prises par rapport aux variables r, θ, ω; ensuite en multipliant par r^2 l'équation (1), on la transformera aisément dans la suivante :

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \cdot \frac{dV}{d\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \cdot \frac{d^2V}{d\omega^2} + r \cdot \frac{d^2.rV}{dr^2} = 0 \text{ ou } = -4\pi\rho r^2, \quad (5)$$

selon que le point attiré fait ou non partie du sphéroïde attirant.

L'équation précédente résulte d'ailleurs directement de la différentiation de la valeur de V exprimée en fonction des variables r, θ, ω; elle est souvent employée dans la théorie des attractions des sphéroïdes.

5. Pour en montrer l'usage dans un cas très simple, supposons que le corps attirant soit une sphère, ou plus généralement un sphéroïde composé de couches concentriques, d'une densité variable suivant une loi quelconque du centre à la surface, en sorte que la densité ρ dépende uniquement de la distance de l'élément dm au centre de la couche. Plaçons l'origine des coordonnées à ce centre, et soit r sa distance au point attiré, il est clair que V sera une fonction de r indépendante des angles θ et ω; l'équation (5) se réduira donc à la suivante :

$$\frac{d^2.rV}{dr^2} = \frac{rd^2V}{dr^2} + \frac{2dV}{dr} = 0 \quad \text{ou} \quad = -4\pi\rho r.$$

Considérons d'abord le cas où le point attiré ne fait pas partie du corps attirant. En multipliant par r et en intégrant l'équation précédente, on aura

$$-\frac{dV}{dr} = \frac{A}{r^2},$$

A étant une constante arbitraire.

Pour la déterminer, observons que $-\frac{dV}{dr}$ exprime, n° 1, l'attraction de la couche sphérique sur le point attiré parallèlement au rayon r, c'est-à-dire l'action totale de cette couche. Si l'on suppose le point attiré extérieur au sphéroïde et situé à une distance infinie de son centre, l'attraction de la couche sur ce point sera évidemment la même que si toute sa masse était réunie à son centre; en nommant donc M la masse de la couche, on aura dans ce cas $A = M$, d'où l'on conclura généralement

$$-\frac{dV}{dr} = \frac{M}{r^2},$$

c'est-à-dire que la couche sphérique exerce sur les points extérieurs à sa surface la même action que si toute la masse était réunie à son centre.

Si le point attiré est situé dans l'intérieur de la couche, l'attraction doit être nulle en même temps que r, c'est-à-dire lorsque le point attiré se trouve au centre même du sphéroïde; on a donc dans ce cas $A = 0$, et l'on en conclura généralement $-\frac{dV}{dr} = 0$, quel que soit r. D'où il suit qu'un sphéroïde composé

de couches sphériques homogènes et concentriques n'exerce aucune action sur les points intérieurs à sa surface.

Supposons maintenant le point attiré compris dans la masse de la sphère dont il subit l'action ; l'équation (5) devient alors

$$\frac{d^2V}{dr^2}+\frac{2}{r}\cdot\frac{dV}{dr}=-4\pi\rho.$$

Si l'on multiplie les deux membres par r^2, on aura

$$d.r^2\frac{dV}{dr}=-4\pi\rho r^2dr;$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$-r^2\frac{dV}{dr}=4\pi.\int\rho r^2dr+\text{B},$$

B étant une constante arbitraire.

Pour la déterminer, observons que s'il s'agit de connaître l'attraction d'une couche sphérique sur un point de sa masse, les intégrales doivent être prises depuis la valeur de r qui répond à la surface intérieure de la couche, jusqu'à sa valeur relative au point attiré. Or, à la première limite, l'action de la couche est nulle ; on a donc généralement $\text{B}=0$, et par conséquent

$$-r^2\frac{dV}{dr}=4\pi.\int\rho r^2dr. \qquad (6)$$

Le second membre de cette équation, les intégrales étant prises dans les limites précédentes, exprime la masse de la couche sphérique qui agit sur le point attiré. En désignant donc par M' la portion de la couche sphérique comprise entre la surface intérieure

et la surface sphérique passant par le point attiré, on aura

$$-\frac{dV}{dr}=\frac{M'}{r^2},$$

valeur qui s'accorde avec celle qui se rapporte aux points extérieurs, lorsqu'on suppose le point attiré situé à la surface de la couche.

Si le sphéroïde était homogène, l'équation (6) donnerait, en l'intégrant,

$$V=-\frac{2\pi}{3}r^2+C,$$

C étant une constante arbitraire.

Supposons le point attiré placé dans l'intérieur de la sphère dont le rayon est a; il faudra, pour étendre l'intégration à toute la masse du corps attirant, prendre les intégrales précédentes depuis $r=0$ jusqu'à $r=a$. Or, à cette dernière limite, la valeur de V est égale à la masse de la sphère divisée par la distance du point attiré à son centre, c'est-à-dire à $\frac{4\pi}{3}.a^2$; on aura par conséquent alors

$$\frac{4\pi}{3}a^2=-\frac{2\pi}{3}a^2+C.$$

En déterminant donc, au moyen de cette équation, la valeur de C, on aura, relativement à la sphère entière et à un point placé dans son intérieur,

$$V=2\pi a^2-\frac{2\pi}{3}r^2.$$

Ces résultats sont conformes à ceux que nous avons trouvés par une autre voie, dans le n° 19 du livre Ier.

CHAPITRE II.

Attractions des sphéroïdes terminés par des surfaces du second ordre.

6. Les formules que nous avons développées dans le chapitre précédent sont générales, et s'appliquent à toute espèce de sphéroïdes, quelles que soient leur nature et leur figure. Nous allons, dans celui-ci, nous occuper en particulier de la détermination des attractions des sphéroïdes terminés par des surfaces elliptiques.

Supposons, pour simplifier, que le corps attirant soit homogène, et que sa densité soit égale à l'unité; on aura $\rho = 1$, et les formules (A), n° 1, deviendront

$$\left.\begin{aligned} A &= \iiint \frac{(a-x).dxdydz}{[(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2]^{\frac{3}{2}}}, \\ B &= \iiint \frac{(b-y).dxdydz}{[(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2]^{\frac{3}{2}}}, \\ C &= \iiint \frac{(c-z).dxdydz}{[(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2]^{\frac{3}{2}}}; \end{aligned}\right\} (a)$$

les intégrales $\int$ se rapportant aux trois variables

x, y, z, et devant s'étendre à la masse entière du sphéroïde.

Mais l'intégration des expressions précédentes est absolument impossible sous cette forme; tout ce qu'on peut faire, c'est d'en éliminer l'une des variables, et de les ramener ainsi à des intégrales doubles. En effet, si l'on intègre la première par rapport à x, qu'on désigne par $\pm x_1$ la double valeur de x, tirée de l'équation de la surface qui termine le sphéroïde, et que, pour abréger, on fasse

$$\rho = \sqrt{(a-x_1)^2+(b-y)^2+(c-z)^2},$$
$$\rho' = \sqrt{(a+x_1)^2+(b-y)^2+(c-z)^2},$$

on aura

$$A = \int\!\!\int dydz \, . \left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho}\right). \qquad (b)$$

En intégrant la seconde des formules (a) par rapport à y, et la troisième par rapport à z, on trouverait, pour B et C, des expressions semblables. Mais on tenterait en vain de pousser plus loin les intégrations, on serait arrêté par des obstacles insurmontables, même dans le cas le plus simple, celui d'un sphéroïde terminé par une surface sphérique.

7. Pour éviter cette difficulté, il faut transformer les coordonnées x, y, z en d'autres variables qui facilitent l'intégration des formules (a), ou permettent du moins de la ramener à de simples quadratures. Ce qu'on a imaginé de plus commode à cet égard, c'est de transporter au point attiré l'origine des coordonnées, et de prendre pour les variables qui déterminent la position de dm, le rayon mené du

point attiré à cet élément, l'angle que fait ce rayon avec l'un des axes coordonnés, et l'angle que forme sa projection sur le plan perpendiculaire à cet axe avec l'un des deux autres axes compris dans ce plan. Soit donc r ce rayon, θ l'angle qu'il forme avec l'axe des x, et ϖ l'angle compris entre sa projection sur le plan des y, z et l'axe des y, on aura

$$x = a - r\cos\theta, \quad y = b - r\sin\theta\cos\varpi, \quad z = c - r\sin\theta\sin\varpi.$$

L'élément dm peut être considéré comme un petit parallélépipède rectangulaire, dont les trois dimensions sont dr, $rd\theta$, et $r\sin\theta\, d\omega$; on aura donc $dm = r^2\sin\theta.drd\theta d\varpi$, et les trois quantités A, B, C deviendront, par cette transformation,

$$\begin{aligned}
A &= \iiint dr.d\theta.d\omega.\sin\theta.\cos\theta,\\
B &= \iiint dr.d\theta.d\omega.\sin^2\theta.\cos\varpi,\\
C &= \iiint dr.d\theta.d\omega.\sin^2\theta.\sin\varpi.
\end{aligned}$$

L'intégration de ces formules relativement à la variable r s'exécute sans peine; mais, pour étendre l'intégrale à la masse entière du corps attirant, il faut distinguer deux cas, selon que le point attiré est situé dans l'intérieur ou au dehors de ce corps. Dans le premier cas, la droite qui passe par le point attiré, et qui se termine à la surface du sphéroïde, est divisée en deux parties par ce point: en nommant donc r et r' ces parties, elles devront être prises pour limites de l'intégrale définie, qui sera égale à la somme des deux intégrales particulières qui leur correspondent. On aura donc ainsi

$$\left.\begin{aligned}
A &= \int\!\!\int (r+r').d\theta.d\varpi.\sin\theta.\cos\theta,\\
B &= \int\!\!\int (r+r').d\theta.d\varpi.\sin^2\theta.\cos\varpi,\\
C &= \int\!\!\int (r+r').d\theta.d\varpi.\sin^2\theta.\sin\varpi.
\end{aligned}\right\}(c)$$

On remplacera dans ces expressions r et r' par leurs valeurs tirées de l'équation du sphéroïde, et l'on intégrera ensuite successivement par rapport à θ et à ω depuis θ et ω égaux à zéro, jusqu'à θ et ϖ égaux à deux angles droits.

Dans le second cas, le rayon qui part du point attiré et qui traverse le sphéroïde rencontre sa surface en deux points. Soit r ce rayon à son entrée dans le sphéroïde, et r' ce même rayon lorsqu'il en sort, l'intégrale définie sera égale à la différence des deux intégrales particulières correspondantes à ces limites; on aura par conséquent dans ce cas

$$\left.\begin{aligned}
A &= \int\!\!\int (r'-r).d\theta.d\varpi.\sin\theta.\cos\theta,\\
B &= \int\!\!\int (r'-r).d\theta.d\varpi.\sin^2\theta.\cos\varpi,\\
C &= \int\!\!\int (r'-r).d\theta.d\varpi.\sin^2\theta.\sin\varpi.
\end{aligned}\right\}(d)$$

On substituera pour r et r' leurs valeurs en fonction de θ et ω, et l'on prendra pour limites des intégrales relatives à ces angles leurs valeurs correspondantes aux points où l'on a $r'-r=0$, c'est-à-dire où le rayon r est tangent à la surface du sphéroïde.

Supposons maintenant que h, h', h'' soient les trois demi-axes respectivement parallèles aux axes des x, des y et des z de l'ellipsoïde dont nous considérons les attractions. L'équation de sa surface, rapportée à son centre, sera

$$\frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{h'^2}+\frac{z^2}{h''^2}=1, \qquad (m)$$

et sa masse sera égale à $\frac{4\pi}{3}\cdot hh'h''$, en nommant π le rapport de la circonférence au diamètre.

Transportons l'origine des coordonnées au point attiré, et introduisons dans l'équation (m) les variables r, θ, ϖ; en substituant pour x, y, z leurs valeurs données dans le n° précédent, on aura

$$r^2.\left(\frac{\cos^2\theta}{h^2}+\frac{\sin^2\theta\cos^2\varpi}{h'^2}+\frac{\sin^2\theta\sin^2\varpi}{h''^2}\right)$$
$$-2r.\left(\frac{a\cos\theta}{h^2}+\frac{b\sin\theta\cos\varpi}{h'^2}+\frac{c\sin\theta\sin\varpi}{h''^2}\right)=1-\frac{a^2}{h^2}-\frac{b^2}{h'^2}-\frac{c^2}{h''^2}.$$

Si l'on résout cette équation par rapport à r, les deux valeurs qui en résulteront seront celles qu'il faudra substituer pour r et r' dans les formules (c) et (d): or, si l'on fait, pour abréger,

$$K=\frac{\cos^2\theta}{h^2}+\frac{\sin^2\theta\cos^2\varpi}{h'^2}+\frac{\sin^2\theta\sin^2\varpi}{h''^2},$$
$$F=\frac{a\cos\theta}{h^2}+\frac{b\sin\theta\cos\varpi}{h'^2}+\frac{c\sin\theta\sin\varpi}{h''^2},$$
$$G=F^2+K.\left(1-\frac{a^2}{h^2}-\frac{b^2}{h'^2}-\frac{c^2}{h''^2}\right),$$

on trouvera, pour les deux racines de l'équation en r,

$$r=\frac{F-\sqrt{G}}{K}, \qquad r'=\frac{F+\sqrt{G}}{K};$$

d'où l'on tire par conséquent,

$$r'+r=\frac{2F}{K}, \quad r'-r=\frac{2\sqrt{G}}{K}:$$

les formules relatives aux points intérieurs au sphéroïde seront donc

$$\left.\begin{aligned}A&=2.\int\!\!\int\frac{d\theta\, d\varpi \sin\theta \cos\theta\, F}{K},\\ B&=2.\int\!\!\int\frac{d\theta\, d\varpi \sin^2\theta \cos\varpi\, F}{K},\\ C&=2.\int\!\!\int\frac{d\theta\, d\varpi \sin^2\theta \sin\varpi\, F}{K},\end{aligned}\right\}\quad(e)$$

et l'on aura, relativement aux points extérieurs,

$$\left.\begin{aligned}A&=2.\int\!\!\int\frac{d\theta\, d\varpi \sin\theta \cos\theta \sqrt{G}}{K},\\ B&=2.\int\!\!\int\frac{d\theta\, d\varpi \sin^2\theta \cos\varpi \sqrt{G}}{K},\\ C&=2.\int\!\!\int\frac{d\theta\, d\varpi \sin^2\theta \sin\varpi \sqrt{G}}{K}.\end{aligned}\right\}\quad(f)$$

Les premières formules sont les plus simples, et s'intègrent sans peine par rapport à la variable ϖ; les secondes, au contraire, présentent de grandes difficultés à cause du radical qu'elles renferment, et qui rend, sous cette forme, l'intégration impossible par toutes les méthodes connues. Heureusement, si l'imperfection de l'Analyse n'a pas permis jusqu'ici de vaincre cette difficulté, on est parvenu à l'éluder, et à faire dépendre les attractions des ellipsoïdes relatives aux points extérieurs, de celles qu'ils exercent sur les points intérieurs ou sur les points de leur surface. Occupons-nous donc exclusivement des formules

qui se rapportent au cas où le point attiré est placé dans l'intérieur du sphéroïde : nous supposerons ensuite qu'il est situé en dehors de sa surface, et nous verrons qu'il est toujours possible de ramener ce second cas au premier.

8. Si, dans la première des formules (*e*), on substitue pour F sa valeur, on aura

$$A = \frac{2a}{h^2} \cdot \iint \frac{d\theta\, d\varpi \sin\theta \cos^2\theta}{K} + \frac{2b}{h'^2} \cdot \iint \frac{d\theta\, d\varpi \sin^2\theta \cos\theta \cos\varpi}{K}$$
$$+ \frac{2c}{h''^2} \cdot \iint \frac{d\theta\, d\varpi \sin^2\theta \cos\theta \sin\varpi}{K}.$$

Cette expression se simplifie en observant que l'intégrale relative à θ devant être prise depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = 180°$, si l'on représente par P une fonction rationnelle quelconque de $\sin\theta$ et $\cos^2\theta$, on aura généralement entre ces limites $\int P \cos\theta\, d\theta = 0$, parce que les valeurs de θ devant être prises à égale distance au-dessus et au-dessous de l'angle droit, la valeur de cette intégrale sera composée d'une suite d'élémens égaux deux à deux et de signes contraires. Les deux derniers termes de l'équation précédente se réduisent donc à zéro en vertu de cette remarque, et l'expression de A, en substituant pour K sa valeur, peut prendre cette forme,

$$A = 2a \cdot \iint \frac{d\theta\, d\varpi \sin\theta \cos^2\theta}{\cos^2\theta + \frac{h^2}{h'^2} \cdot \sin^2\theta \cos^2\varpi + \frac{h^2}{h''^2} \cdot \sin^2\theta \sin^2\varpi}.$$

On trouverait de même

$$B = 2b.\iint \frac{d\theta d\omega \sin^3\theta \cos^2\omega}{\sin^2\theta \cos^2\omega + \frac{h'^2}{h^2}.\cos^2\theta + \frac{h'^2}{h''^2}.\sin^2\theta \sin^2\omega},$$

$$C = 2c.\iint \frac{d\theta d\omega \sin^3\theta \sin^2\omega}{\sin^2\theta \sin^2\omega + \frac{h''^2}{h^2}.\cos\theta^2 + \frac{h''^2}{h'^2}.\sin^2\theta \cos^2\omega}.$$

On peut, avant même d'intégrer ces expressions, en déduire plusieurs propriétés importantes relativement aux attractions des ellipsoïdes.

Les intégrations indiquées, étant indépendantes des coordonnées a, b, c du point attiré, on voit que l'attraction qu'exerce le sphéroïde parallèlement à l'axe des x est la même pour tous les points situés dans un même plan perpendiculaire à cet axe. Il en est de même relativement aux axes des y et des z; d'où l'on peut conclure généralement que les attractions de l'ellipsoïde sur les points placés sur une même ligne droite, passant par l'origine des coordonnées, sont proportionnelles à leur éloignement de son centre.

Si l'on divise respectivement par a, b, c les trois quantités A, B, C, et qu'ensuite on les ajoute, on trouve

$$\frac{A}{a}+\frac{B}{b}+\frac{C}{c} = 2.\int d\theta d\omega \sin\theta,$$

les intégrales devant être prises depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = \pi$, et depuis $\omega = 0$ jusqu'à $\omega = \pi$. On trouve entre ces limites $\int d\theta\, d\omega \sin\theta = 2\pi$; on aura donc

$$\frac{A}{a}+\frac{B}{b}+\frac{C}{c} = 4\pi. \qquad (g)$$

On a d'ailleurs, n° 1,

$$-\frac{dV}{da}=A, \quad -\frac{dV}{db}=B, \quad -\frac{dV}{dc}=C;$$

et d'après la forme des valeurs de A, B, C, il est évident qu'on aura

$$-\frac{d^2V}{da^2}=\frac{A}{a}, \quad -\frac{d^2V}{db^2}=\frac{B}{b}, \quad -\frac{d^2V}{dc^2}=\frac{C}{c};$$

l'équation (g) devient donc ainsi,

$$\frac{d^2V}{da^2}+\frac{d^2V}{db^2}+\frac{d^2V}{dc^2}=-4\pi,$$

équation qui vérifie pour les ellipsoïdes l'équation (2) du n° 3, qui s'applique généralement à des sphéroïdes quelconques.

On peut observer encore que les valeurs de A, B, C ne contenant que les quantités $\frac{h}{k'}$, $\frac{h}{k''}$, ces valeurs ne varieront pas, quels que soient les trois axes du sphéroïde, pourvu qu'ils aient entre eux les mêmes rapports. Or, les rapports des trois axes déterminent simplement les excentricités de l'ellipsoïde : on peut donc en conclure que tous les ellipsoïdes décrits des mêmes foyers exercent sur les points intérieurs des attractions égales. Il suit de là que si l'on suppose le sphéroïde composé d'une suite de couches concentriques et semblables, l'action des couches supérieures au point attiré sera nulle ; d'où résulte le théorème suivant, qui n'est qu'une extension de celui que nous avions trouvé n° 19, livre Ier, relativement à la sphère : *Un point placé au dedans d'une couche elliptique, dont la surface intérieure et la surface extérieure*

sont semblables et semblablement placées, est également attiré de toutes parts.

9. Occupons-nous maintenant de l'intégration de la valeur de A. Si l'on intègre d'abord par rapport à ϖ depuis $\varpi = 0$ jusqu'à $\varpi = \pi$, et qu'on suppose

$$\cos^2\theta + \frac{h^2}{h'^2}\sin^2\theta = m, \quad \cos^2\theta + \frac{h^2}{h''^2}\sin^2\theta = n,$$

on aura

$$A = 2a\int\int\frac{d\theta\, d\varpi \sin\theta\cos^2\theta}{m\cos^2\varpi + n\sin^2\varpi} = 2a\pi\int\frac{d\theta\sin\theta\cos^2\theta}{\sqrt{mn}}.$$

En remettant donc pour m et n leurs valeurs, on aura

$$A = \frac{2a\pi . h'h''}{h^2}\int\frac{d\theta\sin\theta\cos^2\theta}{\sqrt{1+\left(\frac{h'^2-h^2}{h^2}\right).\cos^2\theta}\sqrt{1+\left(\frac{h''^2-h^2}{h^2}\right).\cos^2\theta}}.$$

Cette dernière intégrale doit s'étendre depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = \pi$, ce qui revient à la prendre depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = \frac{1}{2}\pi$, et à doubler le résultat. Si l'on suppose donc $\cos\theta = x$, et qu'on nomme M la masse de l'ellipsoïde, ce qui donne $M = \frac{4\pi}{3} . hh'h''$, et par conséquent $\frac{4\pi . h'h''}{h^2} = \frac{3M}{h^3}$, on aura

$$A = \frac{3aM}{h^3}\int\frac{x^2 dx}{\sqrt{1+\left(\frac{h'^2-h^2}{h^2}\right).x^2}\sqrt{1+\left(\frac{h''^2-h^2}{h^2}\right).x^2}},$$

l'intégrale relative à x devant être prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$.

On pourrait, en intégrant les valeurs de B et C,

n° 8; les réduire de même à de simples quadratures, mais il est plus simple de déduire immédiatement leurs valeurs de l'expression précédente de A. Pour cela, il suffit de remarquer que l'on peut regarder A comme une fonction de a et des trois demi-axes h, h', h'' de l'ellipsoïde; B sera par conséquent une fonction semblable de b et des trois demi-axes h', h, h''; et il en sera de même de C, qui sera une pareille fonction de c et des trois demi-axes h'', h', h. On aura donc les expressions de B et C par une simple permutation des lettres a, h, h', h'' dans l'expression de A. On trouve ainsi

$$B = \frac{3bM}{h'^3} \cdot \int \frac{x^2dx}{\sqrt{1+\left(\frac{h^2-h'^2}{h'^2}\right).x^2} \cdot \sqrt{1+\left(\frac{h''^2-h'^2}{h'^2}\right).x^2}},$$

$$C = \frac{3cM}{h''^3} \cdot \int \frac{x^2dx}{\sqrt{1+\left(\frac{h^2-h''^2}{h''^2}\right).x^2} \cdot \sqrt{1+\left(\frac{h'^2-h''^2}{h''^2}\right).x^2}},$$

ces expressions devant être prises, comme celle de A, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$.

On peut donner aux valeurs de A, B, C, une forme particulière qu'il est bon de connaître. Faisons, pour abréger,

$$\frac{h'^2-h^2}{h^2} = \lambda^2; \quad \frac{h''^2-h^2}{h^2} = \lambda'^2,$$

et supposons ensuite dans la valeur de B,

$$x = \frac{h'y}{h\sqrt{1+\lambda^2y^2}},$$

et dans la valeur de C

$$x = \frac{h''z}{h\sqrt{1+\lambda'^2 z^2}},$$

les expressions trouvées pour A, B, C, deviendront

$$A = \frac{3aM}{h^3} \cdot \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+\lambda^2 x^2}\,\sqrt{1+\lambda'^2 x^2}},$$
$$B = \frac{3bM}{h^3} \cdot \int \frac{y^2 dy}{(1+\lambda^2 y^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{1+\lambda'^2 y^2}},$$
$$C = \frac{3cM}{h^3} \cdot \int \frac{z^2 dz}{\sqrt{1+\lambda^2 z^2} \cdot (1+\lambda'^2 z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Les intégrales relatives à y et à z doivent être prises dans les mêmes limites que les intégrales relatives à x, puisqu'en effet la supposition de $x=0$ donne à la fois $y=0$ et $z=0$, et que la supposition de $x=1$ donne $y=1$ et $z=1$, on peut donc dans B et C changer, si l'on veut, y et z en x, d'où il suit que, si l'on fait

$$L = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+\lambda^2 x^2}\,\sqrt{1+\lambda'^2 x^2}},$$

on aura, pour déterminer A, B, C, ces formules très simples :

$$A = \frac{3aM}{h^3} . L, \quad B = \frac{3bM}{h^3} \cdot \frac{d.\lambda L}{d\lambda}, \quad C = \frac{3cM}{h^3} \cdot \frac{d.\lambda' L}{d\lambda'}.$$

Ces formules s'étendent aux points situés sur la surface du sphéroïde ; car il suffit, pour y avoir égard, de supposer $r=r'$ dans les expressions de A, B, C, ce qui ne change rien à leur forme.

10. La détermination des attractions qu'exerce un ellipsoïde homogène sur les points intérieurs, et sur les

points de sa surface, ne dépend donc plus que de la valeur de la fonction L; mais l'intégration qu'elle exige ne peut être obtenue sous forme finie par les méthodes connues, que dans deux cas particuliers, celui où les quantités λ et λ' sont égales entre elles, et celui où l'une de ces quantités est nulle : dans l'un et l'autre cas, deux des trois demi-axes h, h', h'', sont égaux entre eux, et l'ellipsoïde est de révolution autour du troisième.

Supposons que h soit le plus petit des trois demi-axes du sphéroïde, et faisons d'abord $\lambda=\lambda'$, ce qui donne $h'=h''$. Le corps attirant est alors un ellipsoïde aplati vers les pôles, dont h est le demi-axe de révolution; on aura dans ce cas

$$L=\int\frac{x^2dx}{1+\lambda^2x^2}=\frac{1}{\lambda^3}.(\lambda-\text{arc.tang}\,\lambda).$$

Si l'on différencie par rapport à λ la valeur de L, n° 9, et qu'on fasse $\lambda=\lambda'$ après la différenciation, on trouve

$$\frac{d.\lambda L}{d\lambda}=\int\frac{x^2dx}{(1+\lambda^2x^2)^2}=\frac{1}{2\lambda^3}.\left(\text{arc.tang}\,\lambda-\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right).$$

Les attractions de l'ellipsoïde de révolution aplati vers les pôles seront donc déterminées par les formules suivantes :

$$\left.\begin{aligned}
A&=\frac{3aM}{h^3.\lambda^3}.(\lambda-\text{arc.tang}\,\lambda),\\
B&=\frac{3bM}{2h^3.\lambda^3}.\left(\text{arc.tang}\,\lambda-\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right),\\
C&=\frac{3cM}{2h^3.\lambda^3}.\left(\text{arc.tang}\,\lambda-\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right).
\end{aligned}\right\}(A)$$

Supposons maintenant $\lambda'=0$, ce qui donne $h''=h$. Dans ce cas, h' est le demi-axe de révolution du sphéroïde, et l'on a

$$L=\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1+\lambda^2x^2}}=\frac{1}{2\lambda^3}\cdot\left[\lambda.\sqrt{1+\lambda^2}-\log.(\lambda+\sqrt{1+\lambda^2})\right].$$

$$\frac{d.\lambda L}{d\lambda}=\frac{1}{\lambda^3}\cdot\left[\log.(\lambda+\sqrt{1+\lambda^2})-\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right].$$

On aura donc pour les attractions de l'ellipsoïde de révolution allongé vers les pôles

$$\left.\begin{aligned}
A&=\frac{3aM}{2h^3.\lambda^3}.\left[\lambda.\sqrt{1+\lambda^2}-\log.(\lambda+\sqrt{1+\lambda^2})\right].\\
B&=\frac{3bM}{h^3.\lambda^3}.\left[\log.(\lambda+\sqrt{1+\lambda^2})-\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right].\\
C&=\frac{3cM}{2h^3.\lambda^3}.\left[\lambda.\sqrt{1+\lambda^2}-\log.(\lambda+\sqrt{1+\lambda^2})\right].
\end{aligned}\right\}\text{(B)}$$

Si les conditions précédentes ne sont pas remplies, il est impossible d'obtenir d'une manière rigoureuse les valeurs de A, B, C; mais lorsque l'ellipsoïde s'éloigne peu de la figure de la sphère, λ et λ' deviennent de très petites quantités; on pourra réduire alors la fonction L en série convergente, dont chaque terme soit intégrable, et l'on déterminera de cette manière les attractions du sphéroïde, avec le degré de précision qu'on jugera convenable.

11. Considérons maintenant le cas où le point attiré est extérieur au sphéroïde. Nous avons vu que le radical qui entre dans les expressions différentielles (f) de ses attractions, opposait alors un obstacle invincible à leur intégration. Plusieurs grands géomètres avaient en vain épuisé toutes les ressources de l'Ana-

lyse pour surmonter cette difficulté, lorsque la découverte, due à M. Ivory, d'une propriété remarquable des ellipsoïdes décrits des mêmes foyers, l'a fait enfin entièrement disparaître.

Voici l'énoncé de cette propriété, qu'on peut regarder comme un beau théorème de Mécanique : *Si l'on nomme points correspondans, les points pris sur la surface de deux ellipsoïdes décrits des mêmes foyers, de manière que leurs coordonnées, respectivement parallèles aux trois axes principaux de ces corps, soient entre elles comme ces axes, les attractions qu'exerceront, parallèlement à chaque axe, ces ellipsoïdes sur les points correspondans de leurs surfaces, seront entre elles comme les produits des deux autres axes.*

En effet, soit M le premier ellipsoïde, et A l'attraction qu'il exerce parallèlement à l'axe des x sur le point dont les coordonnées sont a, b, c; désignons par M' le second sphéroïde, et par A' l'attraction qu'il exerce dans la même direction sur le point dont les coordonnées sont a', b', c'; on aura, n° 6,

$$A = \int\int dy\, dz . \left(\frac{1}{\rho_{,}} - \frac{1}{\rho}\right),$$

$$A' = \int\int dy' dz' . \left(\frac{1}{\rho_{,}'} - \frac{1}{\rho'}\right),$$

en supposant pour abréger,

$$\rho = \sqrt{(a-x_{,})^2+(b-y)^2+(c-z)^2}, \rho' = \sqrt{(a'-x_{,}')^2+(b'-y')^2+(c'-z}$$
$$\rho_{,} = \sqrt{(a+x_{,})^2+(b-y)^2+(c-z)^2}, \rho_{,}' = \sqrt{(a'+x_{,}')^2+(b'-y')^2+(c'-z}$$

$+x_{,}$ et $-x_{,}$, désignant les valeurs de la variable x,

qui se rapportent à la surface de M, et $+x'$, et $-x'$, les valeurs de la variable x' relatives à la surface de M'.

Soit, comme précédemment,

$$\frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{h'^2}+\frac{z^2}{h''^2}=1, \quad (h)$$

l'équation de la première de ces surfaces ; il faudrait, pour achever l'intégration de l'expression de A, substituer dans $\rho_{,}$ et ρ les valeurs de x qui résultent de cette équation ; mais cette opération ne nous conduirait à rien ; on peut au contraire, par une transformation ingénieuse des coordonnées, arriver très simplement au théorème que nous nous proposons de démontrer. Pour cela, aux trois variables x, y, z, qui sont liées entre elles par l'équation (h), on en substituera deux autres indépendantes entre elles ; on fera, par exemple,

$$x = h\sin p, \quad y = h'\cos p\sin q, \quad z = h''\cos p\cos q;$$

et l'on voit en effet, en mettant ces valeurs à la place de x, y, z dans l'équation (h), qu'il n'en résulte aucune équation de condition entre les nouvelles variables p et q.

D'après les formules connues pour la tranformation des variables dans les intégrales doubles, on a généralement,

$$dydz = \left(\frac{dy}{dp}\cdot\frac{dz}{dq} - \frac{dy}{dq}\cdot\frac{dz}{dp}\right).dpdq.$$

Les valeurs précédentes de y et z donnent

$$\frac{dy}{dp}\cdot\frac{dz}{dq}-\frac{dy}{dq}\cdot\frac{dz}{dp}=h'h''.\sin p\cos p.$$

On aura donc, en vertu de la formule générale,

$$dy\,dz=h'h''.\sin p\cos p\,dpdq,$$

et par conséquent

$$A=h'h''.\iint dp\,dq\sin p\cos p.\left(\frac{1}{\rho_{,}}-\frac{1}{\rho}\right).$$

On étendra les intégrales à la masse entière du sphéroïde M, en prenant celle qui se rapporte à p depuis $p=0$ jusqu'à $p=\pi$, et celle qui se rapporte à q depuis $q=0$ jusqu'à $q=\pi$; car il est évident qu'en donnant aux angles p et q toutes les valeurs comprises entre 0 et 180°, les variables y et z prendront toutes les valeurs comprises entre $+h'$ et $-h'$ d'une part, et entre $+h''$ et $-h''$ de l'autre, c'est-à-dire tous les couples de valeurs qui correspondent aux différens points de l'ellipsoïde.

Soient maintenant k, k', k'' les trois demi-axes du second ellipsoïde M', qui se rapportent respectivement aux axes des x', des y' et des z', l'équation de sa surface sera

$$\frac{x'^2}{k^2}+\frac{y'^2}{k'^2}+\frac{z'^2}{k''^2}=1;$$

et si l'on fait

$$x'_{,}=k\sin p,\ y'=k'\cos p\sin q,\quad z'=k''\cos p\cos q,$$

on aura, par l'analyse précédente,

$$A' = k'k''.\iint dp\, dq \sin p \cos p. \left(\frac{1}{\rho'_{,}} - \frac{1}{\rho'}\right),$$

les intégrales devant être prises depuis $p = 0$ jusqu'à $p = \pi$, et depuis $q = 0$ jusqu'à $q = \pi$, c'est-à-dire dans les mêmes limites que celles qui se rapportent à la valeur de A.

Comparons maintenant les attractions exercées par les deux sphéroïdes M et M', ce qui se borne à comparer entre elles les valeurs de ρ et de ρ' et celles de $\rho_{,}$ et $\rho'_{,}$. Si l'on développe les deux premières quantités, et qu'on substitue pour $x_{,}$, y, z, et pour $x'_{,}$, y', z', leurs valeurs, on aura

$$\begin{aligned}\rho^2 &= a^2 + b^2 + c^2 - 2.(ah \sin p + bh' \cos p \sin q + ch'' \cos p \cos q)\\ &\quad + h^2 \sin^2 p + h'^2 \cos^2 p \sin^2 q + h''^2 \cos^2 p \cos^2 q,\\ \rho'^2 &= a'^2 + b'^2 + c'^2 - 2.(a'k \sin p + b'k' \cos p \sin q + c'k'' \cos p \cos q)\\ &\quad + k^2 \sin^2 p + k'^2 \cos^2 p \sin^2 q + k''^2 \cos p^2 \cos^2 q.\end{aligned}$$

Si l'on retranche ces deux expressions l'une de l'autre, en observant que les points déterminés par les coordonnées a, b, c et a', b', c' sont des *points correspondans*, et que, d'après la définition que nous avons donnée, on a

$$\frac{a}{a'} = \frac{k}{h}, \qquad \frac{b}{b'} = \frac{k'}{h'}, \qquad \frac{c}{c'} = \frac{k''}{h''};$$

que l'on remarque en outre que les deux ellipsoïdes M et M' ayant mêmes foyers, si l'on nomme e et e' leurs excentricités communes, on a

$$\begin{aligned} h'^2 &= h^2 + e^2, & k'^2 &= k^2 + e^2,\\ h''^2 &= h^2 + e'^2, & k''^2 &= k^2 + e'^2,\end{aligned}$$

$$A = \frac{A' r^2}{r'^2},$$

équation qui donnera l'attraction de la sphère sur un point extérieur lorsque l'attraction sur un point intérieur sera connue, et réciproquement, quelle que soit la loi d'attraction.

Dans le cas de l'attraction en raison inverse du carré des distances, A' exprimant l'action de la sphère dont le rayon est r', sur un point extérieur, on a, n° 5,

$$A' = \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi r'^3 \rho}{r^2};$$

on aura donc $A = \frac{4}{3} \cdot \pi r'$ pour l'action de la grande sphère sur les points intérieurs. Cette expression étant indépendante du rayon r de cette sphère, on en peut conclure que les points placés dans l'intérieur d'une couche sphérique sont également attirés de toutes parts. Réciproquement, pour que cette propriété subsiste, il faut que A soit une fonction indépendante de r; on a alors

$$A' = \frac{H}{r^2},$$

H étant une constante par rapport à r, c'est-à-dire que, dans ce cas, l'attraction de la sphère sur les points extérieurs est réciproque au carré de leurs distances à son centre, ce qui exige nécessairement que la même loi s'observe par rapport à chacun de ses élémens. *La loi de la nature est donc la seule dans laquelle une couche sphérique n'aura aucune*

énoncé, et dont la mécanique céleste est redevable à M. Ivory.

12. Il est important d'observer que les équations (k) subsistent quelle que soit la fonction des distances qui exprime la loi d'attraction. En effet, la valeur de A, après l'intégration relative à x, prendra toujours cette forme,

$$A = \int\int R\, dy\, dz - \int\int R'\, dy\, dz,$$

R étant une fonction donnée de la quantité ρ, et R' une fonction semblable de ρ'. Or, l'analyse du numéro précédent ne s'appuie que sur la forme des quantités ρ et ρ', et elle est indépendante de celle des fonctions R et R'. Il en serait de même des quantités B et C.

Le beau théorème énoncé n° 11, et qui établit les relations qui existent entre les attractions qu'exercent les ellipsoïdes homogènes sur les points situés à l'intérieur ou à l'extérieur de leurs surfaces, a donc lieu pour toutes les lois d'attraction possibles. Si l'on suppose que les deux ellipsoïdes se réduisent à des sphères concentriques, il en résulte que *l'attraction de la grande sphère sur un point placé à la surface de la petite, est à l'attraction de la petite sphère, sur un point placé à la surface de la grande, comme les carrés des rayons de ces deux sphères, ou comme la surface de la sphère extérieure est à la surface de la sphère intérieure*. Soient donc r et r' les rayons de ces deux sphères, A et A' les attractions qu'elles exercent respectivement sur les points de leurs surfaces, on aura

mais elle s'abaisse au troisième en faisant $k^2 = t$. Elle a évidemment une racine réelle comprise entre zéro et l'infini; car, en supposant $k = 0$ et $k = \frac{1}{0}$, on trouve deux résultats de signes contraires; elle donnera donc toujours une valeur réelle pour k, et l'on en conclura, au moyen des équations (l), des valeurs semblables pour k' et k''. On voit d'ailleurs que le premier membre de l'équation (n) décroît continuellement à mesure que k augmente depuis $k = 0$ jusqu'à $k = \frac{1}{0}$: d'où il suit que cette équation n'a qu'une seule racine réelle.

Cela posé, considérons sur l'ellipsoïde M le point dont les coordonnées a', b', c' sont déterminées par les équations

$$a' = \frac{ah}{k}, \quad b' = \frac{bh'}{k'}, \quad c' = \frac{ck''}{k''};$$

ce point étant situé dans l'intérieur de l'ellipsoïde M′, si l'on suppose

$$\frac{k'^2 - k^2}{k^2} = \frac{e^2}{k^2} = \lambda^2, \qquad \frac{k''^2 - k^2}{k^2} = \frac{e'^2}{k^2} = \lambda'^2,$$

$$\mathrm{L} = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 + \lambda^2 x^2} \sqrt{1 + \lambda'^2 x'^2}},$$

on aura, pour déterminer les attractions qu'exerce sur lui ce sphéroïde,

$$\mathrm{A}' = \frac{3a'\mathrm{M}'}{k^3} . \mathrm{L}, \quad \mathrm{B}' = \frac{3b'\mathrm{M}'}{k^3} . \frac{d.\lambda \mathrm{L}}{d\lambda}, \quad \mathrm{C}' = \frac{3c'\mathrm{M}'}{k^3} . \frac{d.\lambda' \mathrm{L}}{d\lambda'}.$$

Si l'on substitue pour a', b', c' leurs valeurs, et qu'on observe que M et M′ étant les masses des deux ellipsoïdes, on a

$$M = \frac{4\pi}{3}.hh'h'', \quad M' = \frac{4\pi}{3}.kk'k'',$$

ces formules donneront, en vertu des équations (k), n° 11,

$$A = \frac{3aM}{k^3}.L, \quad B = \frac{3bM}{k^3}.\frac{d\lambda L}{d\lambda}, \quad C = \frac{3cM}{k^3}.\frac{d.\lambda' L}{d\lambda'}. \quad (p)$$

Ce sont les expressions des attractions qu'exerce l'ellipsoïde M sur le point dont les coordonnées sont a, b, c, la quantité k qu'elles renferment étant donnée par l'équation (n) qu'on peut mettre sous cette forme,

$$k^6 - k^4.(a^2 + b^2 + c^2 - e^2 - e'^2) + k^2.[(a^2 + b^2).e'^2 + (a^2 + c^2).e^2 - e^2 e'^2] - a^2 e^2 e'^2 = 0.$$

Les formules précédentes serviront à déterminer les attractions de l'ellipsoïde sur les points extérieurs : on voit qu'il suffit d'y changer k en h pour les étendre aux points de la surface, et même aux points intérieurs.

Si l'ellipsoïde était de révolution autour de l'axe $2h$, on aurait $e = e'$; l'équation qui détermine k deviendrait, en la divisant par le facteur $k + e$,

$$k^4 - k^2.(a^2 + b^2 + c^2 - e^2) - a^2 e^2 = 0,$$

et les formules (A) du n° 10 donneraient

$$A = \frac{3aM}{k^3.\lambda^3}.(\lambda - \text{arc. tang } \lambda),$$

$$B = \frac{3bM}{2k^3.\lambda^3}.\left(\text{arc. tang } \lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right),$$

$$C = \frac{3cM}{2k^3.\lambda^3}.\left(\text{arc. tang } \lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right).$$

mais elle s'abaisse au troisi… de révolution al-
Elle a évidemment une r… o; par conséquent
zéro et l'infini; car. …
on trouve deux ré… $- (a^2 + c^2) . e^2 = 0$;
donnera donc tou…
en conclura, a… me numéro donneront
leurs semblab…
le premier … $\overline{1+\lambda^2} - \log.(\lambda + \sqrt{1+\lambda^2})\big]$,
nuellemen…
jusqu'à k … $\log.(\lambda + \sqrt{1+\lambda^2}) - \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}\big]$,
seule: r … $\big[\lambda . \sqrt{1+\lambda^2} - \log.(\lambda + \sqrt{1+\lambda^2})\big]$.

Ce…
don… Il résulte des formules (p), que si l'on nomme
le… M' la masse d'un nouvel ellipsoïde ayant les mêmes excentricités et la même position des axes que l'ellipsoïde dont la masse est M, il suffira, pour déterminer les attractions A′, B′, C′ qu'exerce ce corps sur le point dont les coordonnées sont a, b, c, de changer M en M′ dans les équations (p); d'où l'on peut conclure qu'on aura

$$\frac{A}{A'} = \frac{M}{M'}, \quad \frac{B}{B'} = \frac{M}{M'}, \quad \frac{C}{C'} = \frac{M}{M'},$$

c'est-à-dire qu'en général les attractions de deux ellipsoïdes semblables sur un même point extérieur sont entre elles comme leurs masses.

Les trois équations (k), n° 11, donnent

$$\frac{A}{a} = \frac{h'h''}{k'k''} \cdot \frac{A'}{a}, \quad \frac{B}{b} = \frac{hh''}{kk''} \cdot \frac{B'}{b}, \quad \frac{C}{c} = \frac{hh'}{kk'} \cdot \frac{C'}{c}.$$

Si dans les seconds membres de ces équations on

itue pour a, b, c leurs valeurs n° 11, et qu'on ob-
que le point dont les coordonnées sont a', b', c'
ntérieur au sphéroïde M', on a

$$\frac{A'}{a'} + \frac{B'}{b'} + \frac{C'}{c'} = 4\pi,$$

on trouvera

$$\frac{A}{a} + \frac{B}{b} + \frac{C}{c} = 4\pi . \frac{hh'h''}{kk'k''},$$

relation analogue à la précédente et qui doit exister entre les attractions qu'exerce un ellipsoïde homogène sur les points extérieurs à sa surface.

Si le corps attirant n'était pas homogène, mais seulement composé de couches elliptiques de position, d'ellipticité et de densités variables, suivant une loi quelconque du centre à la surface, on déterminerait, par les formules précédentes, les attractions qu'exercent sur un point donné les deux ellipsoïdes terminés par les surfaces intérieures et extérieures de chacune de ces couches; la différence de ces deux attractions sera égale à l'attraction de la couche sur le même point, et l'on aura celle qu'exerce le corps entier en prenant la somme de ces attractions partielles.

15. On peut donc regarder, comme complète, la théorie des attractions des sphéroïdes elliptiques. La seule chose qu'elle laisse encore à désirer, c'est la valeur finie de la fonction que nous avons désignée par L; mais l'intégration dont cette valeur dépend est non-seulement impossible, comme nous l'avons dit, dans le cas général, par toutes les méthodes connues;

elle l'est encore en elle-même, c'est-à-dire que la valeur de L ne saurait être exprimée en termes finis par aucune fonction composée de quantités algébriques, logarithmiques, ou circulaires.

Dans le chapitre suivant, nous nous occuperons de la théorie des attractions des sphéroïdes peu différens de la sphère. Ce problème a d'abord été traité par d'Alembert, et, après lui, par plusieurs illustres géomètres; mais c'est à Laplace qu'on en doit la solution complète; et les résultats auxquels il est parvenu, par leur fécondité et par leur utilité, non-seulement dans la théorie du système du monde, mais encore dans une foule de questions physico-mathématiques, telles que la théorie des fluides, celles de la chaleur, de l'électricité et du magnétisme, doivent faire regarder les travaux de ce grand homme sur ce point important de la mécanique céleste comme l'une des plus belles productions de son génie.

CHAPITRE III.

Attractions des sphéroïdes quelconques.

16. Nous considérerons, dans ce chapitre, les attractions des sphéroïdes quelconques, et en particulier celles des sphéroïdes qui s'écartent peu de la figure de la sphère. Mais, au lieu de déterminer immédiatement les attractions que ces corps exercent suivant une direction donnée, nous commencerons par chercher la valeur de la fonction qui exprime la somme des élémens du sphéroïde, divisés respectivement par leur distance au point attiré, et que nous avons désignée par V, parce que cette fonction a la propriété de donner, par sa différentiation, les attractions qu'exerce le sphéroïde parallèlement à une droite donnée, et que d'ailleurs c'est sous cette forme que se présentent, dans les équations de son équilibre, les attractions mutuelles des molécules d'une masse fluide homogène douée d'un mouvement de rotation, comme nous le verrons dans le chapitre suivant.

Reprenons donc la valeur de V, n° 4, et, pour abréger, faisons $\cos\theta = \mu$, $\cos\theta' = \mu'$, on aura

$$V = \int\int\int \frac{\rho r'^2 dr' d\mu' d\varpi'}{\sqrt{r^2 - 2rr'.[\mu\mu' + \sqrt{1-\mu^2}.\sqrt{1-\mu'^2}.\cos(\varpi - \varpi')] + r'^2}},$$

r étant le rayon mené de l'origine au point attiré, θ l'angle compris entre ce rayon et l'un quelconque des axes coordonnés, ω l'angle que sa projection sur le plan des deux autres axes forme avec l'une de ces droites, et r', θ', ω' désignant ce que deviennent ces trois variables relativement à l'élément dm du sphéroïde.

Pour étendre l'intégration de la valeur de V à la masse entière du corps attirant, il faudra intégrer relativement à r', depuis $r'=0$ jusqu'à $r'=R$, R étant une fonction donnée de θ' et de ω' qui exprime le rayon vecteur d'un point quelconque de la surface du sphéroïde. Quant aux intégrales relatives à ω' et μ', elles devront être prises, d'après ce que nous avons dit n° 4, depuis $\omega'=0$ jusqu'à ω' égal à la circonférence, et depuis $\mu'=1$ jusqu'à $\mu'=-1$.

En substituant de même μ à la place de $\cos\theta$, dans l'équation (5) même numéro, elle prend cette forme plus simple :

$$\frac{d.(1-\mu^2).\frac{dV}{d\mu}}{d\mu}+\frac{1}{1-\mu^2}.\frac{d^2V}{d\omega^2}+r.\frac{d^2.rV}{dr^2}=0, \quad \text{(A)}$$

équation de condition à laquelle devra toujours satisfaire la valeur de V, lorsque le point attiré ne fera pas partie de la masse du sphéroïde.

Comme il est impossible d'intégrer l'expression de V d'une manière générale, on est obligé, pour y parvenir, de recourir aux méthodes ordinaires d'approximation. On réduit l'expression de V en série dont chaque terme est intégrable, et l'on obtient ensuite sa valeur avec le degré d'exactitude qu'on juge

convenable. Pour développer l'expression de V en série convergente, il faut distinguer deux cas, celui où le point attiré est extérieur au sphéroïde, et celui où il est situé dans l'intérieur de ce corps. Dans le premier cas, on a $r > r'$, et si l'on fait

$$F = \{r^2 - 2rr'.[\mu\mu' + \sqrt{1-\mu^2}.\sqrt{1-\mu'^2}.\cos(\varpi - \varpi')] + r'^2\}^{-\frac{1}{2}}.$$

On réduira F en série convergente, en ordonnant son développement par rapport aux puissances descendantes de r; on aura ainsi

$$F = P_0 . \frac{1}{r} + P_1 . \frac{r'}{r^2} + P_2 . \frac{r'^2}{r^3} \ldots\ldots + P_i . \frac{r'^i}{r^{i+1}} + \text{etc.}$$

et il est clair, d'après la valeur de F, que P_0, $P_1 \ldots . P_i$ sont des fonctions rationnelles et entières de μ et de $\sqrt{1-\mu^2}.\cos(\varpi - \varpi')$. F satisfait, par sa nature, à l'équation

$$\frac{d.(1-\mu^2).\frac{dF}{d\mu}}{d\mu} + \frac{\frac{d^2F}{d\varpi^2}}{1-\mu^2} + r.\frac{d^2.rF}{dr^2} = 0. \quad \text{(B)}$$

Si l'on remplace F par sa valeur en série, et qu'on égale à zéro les coefficiens des mêmes puissances de r, on aura, quel que soit i,

$$\frac{d.(1-\mu^2).\frac{dP_i}{d\mu}}{d\mu} + \frac{\frac{d^2P_i}{d\varpi^2}}{1-\mu^2} + i(i+1)P_i = 0. \quad \text{(C)}$$

Si l'on substitue à la place du radical que nous avons représenté par F, sa valeur dans l'expression de V, elle prendra cette forme :

$$V = \frac{V_0}{r} + \frac{V_1}{r^2} + \frac{V_2}{r^3} + \text{etc.},$$

et l'on aura généralement, quel que soit i,

$$v_i = \int\int\int \rho P_i r'^{i+2} dr' du' d\omega',$$

les intégrales devant être prises depuis r' égal à zéro jusqu'à sa valeur à la surface du sphéroïde; l'intégrale relative à μ', depuis $\mu'=1$ jusqu'à $\mu'=-1$, et l'intégrale relative à ω', depuis $\omega'=0$ jusqu'à $\omega'=2\pi$.

Si le sphéroïde est homogène, l'intégration relative à r' pourra toujours s'effectuer, et en nommant R la valeur de r' à la surface, on aura

$$v_i = \frac{\rho}{i+3} \int\int P_i R^{i+3} d\mu' d\omega'.$$

Supposons maintenant le point attiré dans l'intérieur du sphéroïde, on aura $r < r'$ pour toutes les couches du sphéroïde qui enveloppent le point attiré; et pour avoir une série convergente, on réduira F en une suite ascendante par rapport à r; on aura ainsi

$$F = P_0 . \frac{1}{r'} + P_1 . \frac{r}{r'^2} + P_2 . \frac{r^2}{r'^3} \ldots\ldots + P_i . \frac{r^i}{r'^{i+1}} + \text{etc.}$$

Les quantités P_0, P_1, etc., étant les mêmes que ci-dessus, l'expression de V, en y substituant cette valeur, deviendra

$$V = v_0 + v_1 r + v_2 r^2 + \text{etc.},$$

et l'on aura, pour déterminer généralement v_i, l'équation

$$v_i = \int\int\int \frac{\rho P_i dr' d\mu' d\omega'}{r'^{i-1}}.$$

Les intégrales relatives à r' devant être prises depuis $r'=r$ jusqu'à la valeur de r', à la surface du sphé-

roïde, et les intégrales relatives à μ' et à ω' dans les mêmes limites que précédemment.

Si l'on suppose, par exemple, le sphéroïde homogène, et qu'on désigne par R et R' les valeurs de r' correspondantes à la surface du sphéroïde et à la couche qui passe par le point attiré, on aura, en intégrant par rapport à r',

$$v_i = \frac{\rho}{i-2} \cdot \int\int \left(\frac{1}{R'^{i-2}} - \frac{1}{R^{i-2}}\right) . P_i d\mu' d\omega'.$$

Connaissant ainsi la partie de V relative aux couches du sphéroïde qui enveloppent le point attiré, on déterminera comme précédemment la partie relative aux autres couches, par rapport auxquelles le point attiré est extérieur, et en les réunissant, on aura l'attraction qu'exerce sur lui le sphéroïde.

17. Toute la difficulté du développement de V en série se réduit donc à former la valeur générale de P_i. Cette quantité est, comme nous l'avons vu, une fonction finie du degré i de μ et de $\sqrt{1-\mu^2} . \cos(\omega - \omega')$. On peut supposer par conséquent P_i développé en série de cosinus de l'angle $\omega - \omega'$ et de ses multiples. Soit $K_n \cos n(\omega - \omega')$ le terme de cette suite qui dépend de $\cos n(\omega - \omega')$, K_n étant une fonction de μ indépendante de ω, qu'il s'agit de déterminer. Observons d'abord que le terme qui dépend de $\cos n(\omega - \omega')$ dans P_i ne peut résulter que des puissances $n, n+2$, $n+4$, etc., de $\cos(\omega - \omega')$; or $\cos(\omega - \omega')$ ayant pour facteur $\sqrt{1-\mu^2}$, il est clair que $\cos^n(\omega - \omega')$ aura pour facteur $(1-\mu^2)^{\frac{n}{2}}$. D'ailleurs F étant symétrique par rap-

port à μ et à μ', ces deux quantités doivent entrer de la même manière dans chacun des termes de son développement, d'où l'on peut conclure que K_n est de cette forme $(1-\mu^2)^{\frac{n}{2}}.(1-\mu'^2)^{\frac{n}{2}}\,H_n$; on aura donc ainsi

$$P_i=H_0+(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}}.(1-\mu'^2)^{\frac{1}{2}}.H_1.\cos(\omega-\omega')+(1-\mu^2)^{\frac{2}{2}}.(1-\mu'^2)^{\frac{2}{2}}.H_2.\cos 2(\omega-\omega')+$$

En sorte que le terme général du développement de P_i sera $(1-\mu^2)^{\frac{n}{2}}(1-\mu'^2)^{\frac{n}{2}}H_n\cos n(\omega-\omega')$. H_n désignant une fonction de μ dont il faut connaître la forme. P_i devant satisfaire à l'équation aux différences partielles (C), si on lui substitue sa valeur précédente, la comparaison des cosinus qui dépendent des mêmes multiples de $\omega-\omega'$ donnera l'équation aux différences ordinaires

$$(1-\mu^2)^{\frac{n}{2}+1}.\frac{d^2H_n}{d\mu^2}-2(n+1)\mu(1-\mu^2)^{\frac{n}{2}}.\frac{dH_n}{d\mu}+(i-n)(i+n+1)(1-\mu^2)^{\frac{n}{2}}.H_n=0$$

ou bien, en multipliant tous les termes par $(1-\mu^2)^{\frac{n}{2}}$,

$$\frac{d.\left[(1-\mu^2)^{n+1}.\frac{dH_n}{d\mu}\right]}{d\mu}+(i-n)(i+n+1)(1-\mu^2)^n.H_n=0.\quad(f)$$

D'ailleurs il est facile de voir, d'après la considération du radical que nous avons représenté par F, que H_n est de cette forme :

$$H_n=A_0\mu^{i-n}+A_1\mu^{i-n-2}+A_2\mu^{i-n-4}\ldots.+A_s\mu^{i-n-2s}+\text{etc.}$$

En effet, si l'on suppose

$$p=\mu\mu'+\sqrt{1-\mu^2}.\ \sqrt{1-\mu'^2}.\cos(\omega-\omega'),$$

et qu'on développe F après y avoir substitué cette valeur, on trouvera que le coefficient de $\frac{r'^i}{r^{i+1}}$, dans ce développement, est de cette forme :

$$a_0 p^i + a_1 p^{i-2} + a_2 p^{i-4} + \text{etc.}$$

Qu'on remplace maintenant p par sa valeur, et qu'on substitue aux puissances de $\cos(\varpi - \varpi')$ leurs valeurs en cosinus multiples de $\varpi - \varpi'$, on s'assurera sans peine que le coefficient de $(1 - \mu^2)^{\frac{n}{2}} \cos n(\varpi - \varpi')$ a la forme que nous lui avons supposée.

Si l'on substitue la valeur de H_n dans l'équation (f), et qu'on égale à zéro les coefficiens des mêmes puissances de μ, on trouvera généralement

$$A_s = -\frac{(i-n-2s+2)\ (i-n-2s+1)}{2s(2i-2s+1)} \cdot A_{s-1}.$$

En faisant successivement $s = 1$, $s = 2$, etc., on aura par cette formule les valeurs de A_1, A_2, etc., au moyen de la valeur de A_0. On trouve ainsi

$$= A_0 \cdot \left[\mu^{i-n} - \frac{(i-n).(i-n-1)}{2.(2i-1)} . \mu^{i-n-2} + \frac{(i-n).(i-n-1).(i-n-2).(i-n-3)}{2.4.(2i-1).(2i-3)} . \mu^{i-n-4} \right.$$
$$\left. - \frac{(i-n).(i-n-1).(i-n-2).(i-n-3).(i-n-4).(i-n-5)}{2.4.6.(2i-1).(2i-3).(2i-5)} . \mu^{i-n-6} + \text{etc.} \right];$$

A_0 est une fonction de μ' indépendante de μ; or, μ et μ' doivent entrer de la même manière dans l'expression de P_i, comme nous l'avons vu plus haut; on aura donc

$$A_0=\beta_n.\left[\mu'^{i-n}-\frac{(i-n).(i-n-1)}{2.(2i-1)}.\mu'^{i-n-2}+\frac{(i-n).(i-n-1).(i-n-2).(i-n-3)}{2.4.(2i-1).(2i-3)}\mu'^{i-\ldots}\right.$$
$$\left.-\frac{(i-n).(i-n-1).(i-n-2).(i-n-3).(i-n-4).(i-n-5)}{2.4.6.(2i-1).(2i-3).(2i-5)}.\mu'^{i-n-6}+\text{etc.}\right],$$

et par conséquent

$$\left.\begin{aligned} H_n = \beta_n.&\left[\mu^{i-n}-\frac{(i-n).(i-n-1)}{2.(2i-1)}\mu^{i-n-2}+\text{etc.}\right] \\ \times&\left[\mu'^{i-n}-\frac{(i-n).(i-n-1)}{2.(2i-1)}.\mu'^{i-n-2}+\text{etc.}\right], \end{aligned}\right\}(k)$$

β_n étant une quantité indépendante de μ et de μ', et qui par conséquent ne peut être qu'un coefficient numérique. Il ne reste plus qu'à déterminer ce coefficient.

Pour y parvenir, observons que si $i-n$ est un nombre pair, la valeur de H_n contiendra un terme indépendant de μ et de μ', et en ne considérant que ce terme, on aura

$$H_n=\frac{\beta_n.[1.2.3\ldots(i-n)]^2}{[2.4\ldots(i-n)\ldots(2i-1).(2i-3)\ldots(i+n+1)]^2}$$
$$=\frac{\beta^{(n)}.[1.3.5\ldots(i-n-1).1.3.5\ldots(1+n+1)]}{[1.3.5\ldots(2i-1)]^2}.$$

Si $i-n$ est un nombre impair, la valeur de H_n contiendra un terme dépendant des premières puissances de μ et μ', et en n'ayant égard qu'à ce terme, on aura

$$H_n=\frac{\beta_n.\mu\mu'.[1.2.3\ldots(i-n)]^2}{[2.4\ldots(i-n-1).(2i-1).(2i-3)\ldots(i+n+2)]^2}$$
$$=\frac{\beta_n.\mu\mu'.[1.3\;5\ldots(i-n).1.3.5\ldots(1+n)]^2}{[1.3.5\ldots(2i-1)]^2}.$$

Comparons ces valeurs à celles qui résultent directement du développement du radical F. En négligeant les carrés et les puissances supérieures de μ et de μ', on a

$$F = [r^2 - 2rr'\cos(\varpi - \varpi') + r'^2]^{-\frac{1}{2}} + rr'.\mu\mu'.[r^2 - 2rr'\cos(\varpi - \varpi') + r'^2]^{-\frac{3}{2}}.$$

Le premier terme de cette valeur renferme toute la partie de F indépendante de μ et de μ', et le second toute la partie qui ne dépend que de la première puissance de ces variables. Développons les deux radicaux par la méthode que nous avons déjà employée nº 50, livre II. Si l'on nomme c le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité, et qu'on substitue pour $\cos(\varpi - \varpi')$ sa valeur en exponentielles imaginaires, le radical $[r^2 - 2rr'\cos(\varpi - \varpi') + r'^2]^{-\frac{1}{2}}$ pourra être mis sous cette forme

$$\left(r - r'c^{(\varpi-\varpi')\sqrt{-1}}\right)^{-\frac{1}{2}}.\left(r - r'c^{-(\varpi-\varpi')\sqrt{-1}}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Si l'on développe les deux facteurs de cette expression, qu'on multiplie ensuite l'une par l'autre les séries résultantes, on trouvera aisément que le coefficient de $\frac{r'^i}{r^{i+1}}.\left(\frac{c^{n(\varpi-\varpi')\sqrt{-1}} + c^{-n(\varpi-\varpi')\sqrt{-1}}}{2}\right)$, ou de $\frac{r'^i}{r^{i+1}}\cos n(\varpi - \varpi')$, est égal à

$$2.\frac{1.3.5\ldots(i+n-1).1.3.5\ldots(i-n-1)}{2.4.6\ldots(i+n).2.4.6\ldots(i-n)}.$$

C'est la valeur de H_n dans le cas où $i - n$ est pair,

et où l'on suppose $\mu = 0$ et $\mu' = 0$; en la comparant à la valeur trouvée plus haut, on a

$$\beta_n = 2 \cdot \left[\frac{1.3.5\ldots(2i-1)}{1.2.3\ldots\ldots i}\right]^2 \cdot \frac{i(i-1)\ldots\ldots(i-n+1)}{(i+1).(i+2)\ldots\ldots(i+n)}.$$

Il ne faut prendre que la moitié de ce coefficient, dans le cas où $n = 0$; on a alors

$$\beta_0 = \left[\frac{1.3.5\ldots(2i-1)}{1.2.3\ldots\ldots i}\right]^2.$$

On trouvera de la même manière que le coefficient de $\frac{r'^i}{r^{i+1}}.\mu\mu'.\cos n(\omega - \omega')$ dans F, est

$$2 \cdot \frac{1.3.5\ldots(i+n).1.3.5\ldots\ldots(i-n)}{2.4.6\ldots(i+n-1).2.4.6\ldots(i-n-1)}.$$

C'est la valeur de H_n, quand $i-n$ est impair, et qu'on néglige les carrés et les puissances supérieures de μ et μ'. Si on la compare à celle que nous avons trouvée plus haut, dans le même cas, on a

$$\beta_n = 2 \cdot \left[\frac{1.3.5\ldots(2i-1)}{1.2.3\ldots\ldots i}\right]^2 \cdot \frac{i(i-1)\ldots\ldots(i-n+1)}{(i+1).(i+2)\ldots(i+n)}.$$

Ainsi l'expression de β_n est la même dans le cas de $i-n$ pair et dans le cas de $i-n$ impair. Si $n = 0$, on aura, comme précédemment,

$$\beta_0 = \left[\frac{1.3.5\ldots(2i-1)}{1.2.3\ldots\ldots i}\right].$$

En substituant pour β_n sa valeur dans l'équation (k), on aura la valeur générale de H_n.

18. Avant d'aller plus loin, nous allons démontrer une propriété remarquable des fonctions de l'espèce de celles que nous avons désignées par P_i, et qui nous sera utile dans les recherches suivantes. Soient Y_i et Z_n deux fonctions rationnelles et entières de μ, $\sqrt{1-\mu^2}.\sin\omega$ et $\sqrt{1-\mu^2}.\cos\omega$, qui satisfont à l'équation (C), on aura généralement, i étant supposé différent de n,

$$\int\int Y_i Z_n d\mu d\omega = 0,$$

les intégrales étant prises depuis $\mu = -1$ jusqu'à $\mu = 1$, et depuis $\omega = 0$ jusqu'à $\omega = 2\pi$.

En effet, par la définition même des fonctions Y_i et Z_n, on aura

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d.(1-\mu^2).\frac{dY_i}{d\mu}}{d\mu} + \frac{\frac{d^2Y_i}{d\omega^2}}{1-\mu^2} + i(i+1)Y_i = 0, \\ &\frac{d.(1-\mu^2).\frac{dZ_n}{d\mu}}{d\mu} + \frac{\frac{d^2Z_n}{d\omega^2}}{1-\mu^2} + n(n+1)Z_n = 0. \end{aligned}\right\} (o)$$

La première de ces équations, en la multipliant par $Z_n d\mu d\omega$, donnera

$$\begin{aligned} i(i+1).\int\int Y_i Z_n.d\mu d\omega = &-\int\int Z_n.\frac{d.(1-\mu^2).\frac{dY_i}{d\mu}}{d\mu}.d\mu d\omega \\ &-\int\int \frac{Z_n.\frac{d^2Y_i}{d\omega^2}}{1-\mu^2}.d\mu d\omega. \end{aligned}$$

La seconde des équations (o) fournirait une équation semblable. Si l'on retranche l'une de l'autre

ces deux équations, qu'on observe qu'en intégrant relativement à μ, on a

$$\int Z_n \cdot \frac{d.(1-\mu^2).\frac{dY_i}{d\mu}}{d\mu} d\mu - \int Y_i . \frac{d.(1-\mu^2).\frac{dZ_n}{d\mu}}{d\mu} d\mu$$
$$=(1-\mu^2).\frac{dY_i}{d\mu}.Z_n-(1-\mu^2).\frac{dZ_n}{d\mu}.Y_i,$$

quantité qui se réduit à zéro lorsque les intégrales sont prises depuis $\mu=-1$ jusqu'à $\mu=1$.

Qu'on observe de même qu'en intégrant relativement à ω, on a

$$\int Z_n \frac{d^2Y_i}{d\omega^2} d\omega - \int Y_i \frac{d^2Z_n}{d\omega^2} d\omega = Z_n \frac{dY_i}{d\omega} - Y_i \frac{dZ_n}{d\omega},$$

quantité qui se réduit encore à zéro lorsque les intégrales sont prises depuis $\omega=0$ jusqu'à $\omega=2\pi$, parce que les valeurs de Y_i, $\frac{dY_i}{d\mu}$, Z_n, $\frac{dZ_n}{d\mu}$, sont les mêmes à ces deux limites; on trouvera

$$i(i+1)\iint Y_iZ_n d\mu d\omega = n(n+1)\iint Y_iZ_n d\mu d\omega = 0.$$

On a donc généralement, si n est différent de i,

$$\int Y_iZ_n d\mu d\omega = 0.$$

19. Les formules des nos 16, 17 et 18 s'appliquent à des sphéroïdes quelconques; nous allons considérer présentement en particulier les sphéroïdes très peu différens de la sphère, et déterminer les fonctions v_0, v_1, etc., ν_0, ν_1, etc., relativement à ces sphéroïdes. Supposons que le sphéroïde diffère très peu de la sphère dont le rayon est a; soit r' le rayon mené de

l'origine des r à la surface du sphéroïde; on aura $r' = a(1 + \alpha y')$, α étant un très petit coefficient constant dont on peut négliger le carré et les puissances supérieures, et y' une fonction de sinus et cosinus de θ' et ϖ', qui détermine la position du rayon r' et qui dépend de la nature du sphéroïde. On a généralement pour un point extérieur

$$V_i = \frac{1}{i+3} \int\int P_i r'^{i+3} d\mu' d\varpi'.$$

En substituant dans cette formule pour r' sa valeur précédente et négligeant les quantités de l'ordre α^2, on aura

$$V_i = \frac{a^{i+3}}{i+3} \int\int P_i d\mu' d\varpi' + a^{i+3} \alpha \int\int P_i y' d\mu' d\varpi'.$$

On a d'ailleurs généralement, par ce qui a été démontré n° 18, i étant différent de zéro,

$$\int\int P_i d\mu' d\varpi' = 0;$$

on aura donc simplement

$$V_i = a^{i+3} \alpha \int\int P_i y' d\mu' d\varpi'.$$

Lorsque $i = 0$, on a, n° 17, $P_0 = 1$, et l'intégrale relative à ϖ' devant être prise depuis $\varpi' = 0$ jusqu'à $\varpi' = 2\pi$, celle qui se rapporte à μ', depuis $\mu' = 1$ jusqu'à $\mu' = -1$, on trouve

$$V_0 = \frac{4\pi a^3}{3} + a^3 \alpha . \int\int y' d\mu' d\varpi',$$

d'où l'on voit que dans l'expression de V la quantité v_0 sera égale à $\frac{4\pi a^3}{3}$, plus à une très petite quantité de l'ordre α, et toutes les autres quantités v_1, v_2 seront très petites du même ordre.

Supposons généralement

$$\iint P_i y' d\mu' d\omega' = U_i,$$

on aura

$$v_0 = \frac{4\pi a^3}{3} + a^3 \alpha U_0, \quad v^{(i)} = a^{i+3} \alpha U_i.$$

On aura donc, pour l'expression de V relative à un point extérieur,

$$V = \frac{4\pi a^3}{3r} + \frac{a^3 \alpha}{r} \cdot \left(U_0 + U_1 \cdot \frac{a}{r} + U_2 \cdot \frac{a^2}{r^2} + \text{etc.} \right). (a)$$

Considérons maintenant l'attraction du sphéroïde sur les points intérieurs. On a généralement dans ce cas,

$$v_i = \iiint \frac{P_i dr' d\mu' d\omega'}{r'^{i-1}}.$$

Supposons que V représente l'attraction de la couche dont le rayon de la surface extérieure est R', et dont la surface intérieure est celle de la sphère du rayon a, en sorte que $R' - a$ est l'épaisseur de cette couche. En intégrant dans ces limites la valeur précédente, on aura

$$v_i = -\frac{1}{i-2} \cdot \iint \frac{P_i d\mu \, d\omega}{R^{i-2}},$$

en observant que l'on a, par ce qui précède,

$$\iint \mathrm{P}_i d\mu' d\varpi' = 0.$$

Si l'on substitue dans cette expression $a(1+\alpha y')$ à la place de R', et qu'on rejette les termes qui s'évanouissent par l'intégration, ainsi que ceux qui sont du second ordre, par rapport à α, la valeur de v_i deviendra

$$v_i = \frac{\alpha}{a^{i-2}} \cdot \iint \mathrm{P}_i y' d\mu' d\varpi' = a^2\alpha \cdot \frac{1}{a^i} \cdot \mathrm{U}_i ;$$

on aura donc

$$\mathrm{V} = a^2\alpha \cdot \left(\mathrm{U}_0 + \mathrm{U}_1 \cdot \frac{r}{a} + \mathrm{U}_2 \cdot \frac{r^2}{a^2} + \text{etc.}\right).$$

Telle est l'expression de l'attraction de la couche dont l'épaisseur est $a\alpha y'$ sur le point attiré; en y joignant la valeur de V relative à l'action de la sphère dont le rayon est a sur le même point, on aura l'attraction entière qu'exerce sur lui le sphéroïde. Or, le point attiré est, par hypothèse, situé dans l'intérieur de la sphère et à une distance r de son centre; on aura donc, n° 5,

$$\mathrm{V} = 2\pi a^2 - \frac{2\pi r^2}{3},$$

et en réunissant les deux parties de V, on aura généralement, relativement aux points intérieurs au sphéroïde,

$$\mathrm{V} = 2\pi a^2 - \frac{2\pi r^2}{3} + a^2\alpha \cdot \left(\mathrm{U}_0 + \mathrm{U}_1 \cdot \frac{r}{a} + \mathrm{U}_2 \cdot \frac{r^2}{a^2} + \text{etc.}\right). \quad (b)$$

Les formules (a) et (b) renferment toute la théo-

rie des attractions des sphéroïdes homogènes très peu différens de la sphère. En différenciant la première par rapport à r, on aura

$$-\frac{dV}{dr}=\frac{4\pi a^3}{3r^2}+\frac{a^3\alpha}{r^2}.\left(U_0+2U_1.\frac{a}{r}+3U_2.\frac{a^2}{r^2}+\text{etc.}\right).$$

C'est l'attraction qu'excerce suivant le rayon r le sphéroïde sur un point extérieur. Le premier terme de cette valeur exprime, comme on voit, l'attraction de la sphère dont le rayon est a; les termes suivans sont de l'ordre α. Les deux autres composantes de l'attraction du sphéroïde seraient du même ordre, en sorte qu'aux quantités près de l'ordre du carré de α, l'action totale du corps sur le point attiré est représentée par $-\frac{dV}{dr}$.

Si le point attiré était à la surface même du sphéroïde, on aurait $r=a(1+\alpha y)$, en désignant par y ce que devient y' quand on y change μ' et ω' en μ et ω. On aura donc alors, en négligeant les quantités de l'ordre α^2,

$$\left.\begin{aligned}V&=\frac{4\pi a^2}{3}.(1-\alpha y)+a^2\alpha.(U_0+U_1+U_2+\text{etc.})\\-\left(\frac{dV}{dr}\right)&=\frac{4\pi a}{3}.(1-2\alpha y)+a\alpha.(U_0+2U_1+3U_2+\text{etc.}).\end{aligned}\right\}(\text{(}$$

20. Ce cas mérite une attention particulière, parce qu'il existe, pour les points placés à la surface des sphéroïdes peu différens de la sphère, une relation importante entre la fonction V et sa différentielle, qui

peut souvent faciliter la recherche de leurs attractions. Pour démontrer cette propriété, reprenons l'expression générale de V :

$$V = \int \frac{r'^2 dr' d\mu' d\varpi'}{\sqrt{r^2 - 2rr' . [\mu\mu' + \sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu'^2}\cos(\varpi - \varpi') + r'^2}}.$$

Supposons que le sphéroïde soit très peu différent de la sphère dont le rayon est a, et qui est décrite du même centre; soit $r' = a(1 + \alpha y')$ le rayon mené à la surface du sphéroïde, α étant une très petite quantité dont on néglige le carré et les puissances supérieures. Il est clair que l'on pourra regarder la fonction V comme composée de deux parties : l'une relative à la sphère du rayon a, et qui est égale à $\frac{4\pi a^3}{3r}$; l'autre relative à l'excès du sphéroïde sur la sphère, et que nous désignerons par u. On aura donc ainsi

$$V = \frac{4\pi a^3}{3r} + u;$$

et l'action qu'exerce le sphéroïde sur le point attiré sera

$$-\left(\frac{dV}{dr}\right) = \frac{4\pi a^3}{3r^2} - \frac{du}{dr}.$$

Si l'on multiplie par $2r$ cette seconde équation, et qu'on la retranche de la première, on aura

$$V + 2r . \frac{dV}{dr} = -\frac{4\pi a^3}{3r} + u + 2r . \frac{du}{dr}. \quad (d)$$

Maintenant soit dm' une des molécules de l'excès

du sphéroïde sur la sphère, et f sa distance au point attiré ; on aura

$$u=\int\frac{dm'}{f} \text{ et } \frac{du}{dr}=\int dm'.\frac{d.\frac{1}{f}}{dr};$$

on aura donc

$$u+2r.\frac{du}{dr}=\int\left(\frac{1}{f}+2r.\frac{d.\frac{1}{f}}{dr}\right).dm'.$$

Si le point attiré est à la surface du sphéroïde, on a $r=a(1+\alpha y)$, en désignant par y ce que devient y' lorsque μ' et ω' deviennent μ et ω; mais comme u et $\frac{du}{dr}$ sont de l'ordre α, et que nous négligeons les quantités de l'ordre α^2, il suffira de faire $r=a$ dans l'équation précédente; on aura donc à la surface du sphéroïde

$$u+2a.\frac{du}{dr}=\int\left(\frac{1}{f}+2r.\frac{d.\frac{1}{f}}{dr}\right).dm'.$$

Or, on a généralement $f=\sqrt{a^2-2ar\gamma+r^2}$, en désignant par γ le cosinus de l'angle que forme le rayon r' avec la droite menée du centre du sphéroïde au point attiré, ou, ce qui revient au même, en faisant

$$\gamma=\mu\mu'+\sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu'^2}\cos(\omega-\omega').$$

De là on peut conclure aisément, par la différentiation,

$$\frac{1}{f} + 2r \, . \, \frac{d \, . \frac{1}{f}}{dr} = \frac{r^2 - a^2}{f^3}.$$

En observant donc que dm' désignant l'un des élémens de l'excès du sphéroïde sur la sphère, on a $dm' = \frac{1}{3} r'^3 d\mu' d\varpi' = a^3 \alpha y' d\mu' d\varpi'$, on aura

$$u + 2a \, . \, \frac{du}{dr} = a^3 \alpha \iint \frac{(r^2 - a^2) y' d\mu' d\varpi'}{f^3}. \quad (e)$$

La quantité renfermée sous le signe intégral devient nulle lorsque l'on suppose $r = a$, c'est-à-dire quand le point attiré est à la surface du sphéroïde, à moins cependant que f ne se réduise en même temps à zéro. Or f est nul lorsqu'on y suppose à la fois $\gamma = 1$ et $r = a$, l'intégrale précédente devant être prise entre les limites $\gamma = 1$ et $\gamma = -1$; il est donc nécessaire de savoir ce qu'elle devient dans le premier cas. Si les intégrations étaient effectuées, le facteur commun au numérateur et au dénominateur de la fonction $\int \frac{(r^2 - a^2) y' d\mu' d\varpi'}{f^3}$ disparaîtrait, et il serait facile ensuite d'avoir sa vraie valeur correspondante à l'hypothèse de $r = a$; mais comme la forme de la fonction y' est généralement inconnue, il faut y parvenir indépendamment de cette intégration. Voici pour cela un procédé très simple. Supposons en général $y' = f(\mu', \varpi')$; il est clair que le second membre de l'équation (e) devient nul, lorsque $r = a$, pour toutes les valeurs de μ' et de ϖ' qui diffèrent sensi-

blement de μ et de ω. Si l'on fait donc $\mu'=\mu+h$, et $\omega'=\omega+k$, et qu'on substitue ces valeurs dans l'équation (e), on pourra y regarder h et k comme des quantités infiniment petites. Cela posé, on aura généralement

$$y'=f(\mu,\omega)+\zeta,$$

en représentant par ζ une très petite quantité du même ordre que h et k. Si l'on substitue cette valeur dans l'équation (e), et qu'on néglige la partie dépendante de ζ, qui sera toujours infiniment petite relativement à la première, en observant que $y=f(\mu,\omega)$, puisque y est ce que devient y' lorsqu'on y change μ' et ω' en μ et ω, on aura

$$u+2a.\frac{du}{dr}=a^3\alpha y.(r^2-a^2)\iint\frac{d\mu'd\omega'}{f^3}.$$

Pour faciliter l'intégration, prenons pour origine de l'angle que nous avons désigné par θ, le rayon r, ce qui donne $\mu=1$, $\sqrt{1-\mu^2}=0$. On aura simplement alors $f=a^2-2ar\mu'+r^2$, et en intégrant par rapport à ω', depuis $\omega'=0$ jusqu'à $\omega'=2\pi$,

$$\iint\frac{d\mu'd\omega'}{f^3}=2\pi.\int\frac{d\mu'}{f^3}.$$

On a d'ailleurs

$$\frac{d\mu'}{f^3}=-\frac{1}{ar}.\frac{df}{f^2};$$

on aura donc en intégrant

$$\int \frac{d\mu'}{f^3} = \frac{1}{ar} \cdot \frac{1}{f}.$$

Cette intégrale devant être prise depuis $\mu' = -1$ jusqu'à $\mu' = +1$, ce qui donne $f = r + a$ et $f = r - a$, on aura, pour sa valeur complète,

$$\frac{1}{ar(r+a)} - \frac{1}{ar(r-a)} = -\frac{2}{r(r^2 - a^2)},$$

par conséquent

$$u + 2a \cdot \frac{du}{dr} = -\frac{4\pi a^3 \alpha y}{r}.$$

Si l'on suppose maintenant $r = a$ dans cette equation, on trouve

$$u + 2a. \frac{du}{dr} = -4\pi a^2 \alpha y. \qquad (g)$$

L'équation (d), en y substituant $a(1 + \alpha y)$ à la place de r, et en observant qu'aux quantités près de l'ordre α, on a $\frac{dV}{dr} = -\frac{4\pi a}{3}$, donne

$$V + 2a. \frac{dV}{dr} = -\frac{4\pi a^2}{3} + 4\pi a^2 \alpha y + u + 2a. \frac{du}{ar}.$$

On aura donc, en vertu de l'équation (g), aux quantités près de l'ordre α^2,

$$V + 2a. \frac{dV}{dr} = -\frac{4\pi a^2}{3}. \qquad (h)$$

Cette équation extrêmement remarquable s'étend à tous les sphéroïdes peu différens de la sphère. Elle

fait voir que, dans la fonction $V + 2\alpha . \frac{dV}{dr}$ toutes les quantités de l'ordre α disparaissent, en sorte que cette fonction est la même par rapport à la sphère et au sphéroïde qui en diffère très peu, quelle que soit d'ailleurs la position du point attiré à la surface de ces deux corps. Cette équation a d'abord été trouvée par Laplace; mais la démonstration qu'il en donne dans le second volume de la *Mécanique céleste*, et qu'il a reproduite ensuite dans le cinquième, a été l'objet d'une controverse fort vive, qui a fait même révoquer en doute par plusieurs géomètres la généralité du théorème qui en résulte. Il me semble que la démonstration qui précède est à l'abri de toute objection sérieuse (*)

21. Si l'on substitue dans l'équation (h), pour V et $\frac{dV}{dr}$, leurs valeurs (c), n° 19, on trouvera

$$4\pi . y = U_0 + 3U_1 + 5U_2 \ldots + (2i+1)U_i + \text{etc.}$$

La fonction y peut donc toujours se développer dans une série de cette forme

$$y = Y_0 + Y_1 + Y_2 \ldots + Y_i + \text{etc.}$$

Les quantités Y_0, Y_1, etc., étant des fonctions rationnelles de μ, $\sqrt{1-\mu^2}.\cos\omega$, $\sqrt{1-\mu^2}.\sin\omega$, qui

(*) Voir, sur ce sujet, Lagrange, *Journ. de l'École Polythechnique*, tome VIII; M. Ivory, *Transactions philosophiques*, tome CII; M. Poisson, *Connaissance des Tems* pour 1830.

satisfont à l'équation aux différences partielles (C). Cette réduction est indépendante de la forme de la fonction y, et doit être considérée comme une propriété résultante des attractions des sphéroïdes peu différens de la sphère.

Si l'on compare les deux valeurs précédentes de y, en observant qu'on a, n° 19, $U_i = \int P_i y' d\mu' d\omega'$, on trouvera généralement

$$\int\int P_i y' d\mu' d\omega' = \frac{4\pi Y_i}{2i+1}. \qquad (l)$$

On a d'ailleurs, en représentant par Y'_0, Y'_1, etc., ce que deviennent les quantités Y_0, Y_1, etc., lorsqu'on y change μ et ω en μ' et ω',

$$y' = Y'_0 + Y'_1 + Y'_2 \ldots + Y'_i + \text{etc.};$$

en observant donc qu'on a généralement, par le n° 18,

$$\int\int P_i Y'_n d\mu' d\omega' = 0,$$

n étant un nombre différent de i, l'équation (l) donnera simplement

$$\int\int P_i Y'_i d\mu' d\omega' = \frac{4\pi Y_i}{2i+1}, \qquad (m)$$

les limites des intégrales étant les mêmes que précédemment.

Cette équation renferme l'énoncé d'une nouvelle propriété remarquable dont jouissent les fonctions de la nature de celles que nous avons désignées par Y_i et Z_n; mais elle est plus restreinte que la première, démontrée dans le n°.18, parce qu'alors nous supposions aux fonctions Y_i et Z_n toute la généralité dont elles sont susceptibles, tandis qu'ici nous sup-

$Y'_0 + Y'_1 +$ etc. dans cette expression, en remarquant qu'on a généralement par le n° 11 $\int Y'_i d\mu' d\omega' = 0$, i étant différent de zéro, et que l'on a, par ce qui précède, $\int Y'_0 d\mu' d\omega' = 4\pi Y_0$, on trouvera

$$M = \frac{4\pi a^3}{3} + 4\pi a^3 \alpha Y_0.$$

En prenant donc, pour la valeur de a, le rayon de la sphère égale en solidité au sphéroïde, on aura $Y_0 = 0$, et le terme Y_0 disparaîtra de la valeur de y, ainsi que ceux qui en dépendent dans les formules (n) et (p).

On a généralement

$$Y_i = \frac{2i+1}{4\pi} \cdot \int\int P_i y' d\mu' d\omega'.$$

Si l'on suppose $i = 1$ dans cette équation, et qu'on substitue à la place de y' son développement, on aura

$$Y_1 = \frac{3}{4\pi} \int\int P_1 Y'_1 d\mu' d\omega'.$$

D'après la valeur générale de P_i, il est aisé de voir qu'on aura, dans le cas de $i = 1$,

$$P_1 = h\mu' + h' . \sqrt{1-\mu'^2} . \sin\omega' + h'' . \sqrt{1-\mu'^2} . \cos\omega',$$

h, h', h'' étant des constantes. On aura donc

$$Y_1 = \frac{3h}{4\pi} . \int\int y'\mu' d\mu' d\omega' + \frac{3h'}{4\pi} . \int\int y' \sqrt{1-\mu'^2} . \sin\omega' d\mu' d\omega'$$
$$+ \frac{3h''}{4\pi} . \int\int y' \sqrt{1-\mu'^2} . \cos\omega' d\mu' d\omega'$$

Si l'on désigne par dm l'un des élémens de l'excès du sphéroïde sur la sphère, on aura

$$dm = a^3\alpha . \int\int y' d\mu' d\varpi' ;$$

on peut donc écrire ainsi la valeur de Y_1,

$$Y_1 = H\int a\mu' . dm + H'\int a\sqrt{1-\mu'^2}\sin\varpi' . dm + H''\int a\sqrt{1-\mu'^2}\cos\varpi' . dm ,$$

H, H', H'' étant trois quantités constantes.

Si l'on désigne par x', y', z' les trois coordonnées rectangulaires de la molécule dm, on aura, aux quantités près de l'ordre α,

$$x' = a\mu' , \quad y' = a\sqrt{1-\mu'^2} . \sin\varpi' , \quad z' = a\sqrt{1-\mu'^2} . \cos\varpi' .$$

Si, de plus, on suppose l'origine des coordonnées au centre de gravité du sphéroïde, on a

$$\int x' dm = 0, \quad \int y' dm = 0, \quad \int z' dm = 0.$$

On aura donc, dans ce cas, $Y_1 = 0$. Le terme dépendant de Y_1 disparaîtra par conséquent dans le développement de y et dans les formules (n) et (p), en prenant pour origine des coordonnées le centre de gravité du sphéroïde. Ce résultat d'ailleurs peut aisément s'étendre à toute espèce de sphéroïdes.

22. Concevons maintenant le point attiré situé dans l'intérieur d'une couche à très peu près sphérique; plaçons l'origine des coordonnées au centre, et supposons que le rayon de la surface intérieure soit

$$a + a\alpha . (Y_2 + Y_3 + Y_4 + \text{etc.}),$$

et que le rayon de la surface extérieure soit de la forme

$$a'+a'\alpha.(Y'_1+Y'_2+Y'_3+\text{etc.}).$$

Si l'on désigne par ΔV l'attraction de la couche, il est clair qu'on aura la valeur de ΔV, en retranchant la valeur de V relative au premier sphéroïde, de la valeur de V relative au second; on trouvera ainsi

$$\Delta V = 2\pi.(a'^2 - a^2) + 4\pi\alpha.\left[\frac{a'r}{3}.Y'_1 + \frac{r^2}{5}.(Y'_2 - Y_2) + \frac{r^3}{7}.\left(\frac{Y'_3}{a'} - \frac{Y_3}{a}\right) + \text{etc.}\right].$$

Si l'on veut que le point placé dans l'intérieur de la couche soit également attiré de toutes parts, il faut que ΔV se réduise à une fonction indépendante des variables r, θ et ϖ, puisque les différences partielles de ΔV, prises par rapport à ces quantités, expriment les attractions de la couche sur le point attiré. Cette condition donne $Y'_1 = 0$, et généralement

$$Y'_i = \left(\frac{a'}{a}\right)^{i-2}.Y_i,$$

équation qui détermine le rayon de la surface extérieure lorsque celui de la surface intérieure est donné.

Si la surface intérieure est elliptique, on a

$$Y_3 = 0, \quad Y_4 = 0, \text{ etc.},$$

et par conséquent

$$Y'_3 = 0, \quad Y'_4 = 0;$$

les rayons des surfaces intérieure et extérieure de la couche sont donc

$$a(1+\alpha Y_2),\quad a'(1+\alpha Y_2);$$

d'où l'on voit que ces surfaces appartiennent à deux ellipsoïdes semblables et semblablement placés, ce qui s'accorde avec le résultat trouvé n° 8.

Supposons le rayon de la surface intérieure de la forme $a(1+\alpha y)$, et le rayon de la surface extérieure de la forme $a(1+\alpha y+\alpha z)$, z étant une fonction de μ et de ϖ qu'on pourra développer en une série de cette forme,

$$z = Z_0 + Z_1 + Z_2 + \text{etc.}$$

On aura, par les formules (n) et (p), relativement aux points intérieurs et extérieurs,

$$\Delta V = \frac{4\pi a^3\alpha}{r}.\left(Z_0 + \frac{a}{3r}.Z_1 + \frac{a^2}{5r^2}.Z_2 + \text{etc.}\right),$$
$$\Delta' V = 4\pi a^2\alpha.\left(Z_0 + \frac{r}{3a}.Z_1 + \frac{r^2}{5a^2}.Z_2 + \text{etc.}\right).$$

En différenciant, on aura pour les attractions qu'exerce la couche sur les points extérieurs et intérieurs, suivant le rayon r,

$$-\frac{d.\Delta V}{dr} = \frac{4\pi a^3\alpha}{r^2}.\left(Z_0 + \frac{2a}{3r}.Z_1 + \frac{3a^2}{5r^2}.Z_2 + \text{etc.}\right)$$
$$-\frac{d.\Delta' V}{dr} = \frac{4\pi a^2\alpha}{r}.\left(\frac{r}{3a}.Z_1 + \frac{2r^2}{5a^2}.Z_2 + \text{etc.}\right).$$

Si l'on suppose donc le point à la surface, qu'on fasse $r=a$ dans ces formules et qu'on les compare

ensuite, on aura

$$\frac{d.\Delta'V}{dr}-\frac{d.\Delta V}{dr}=4\pi a\alpha.(Z_0+Z_1+Z_2+\text{etc.})=4\pi a\alpha z.$$

D'où l'on voit que si deux points sont situés sur le même rayon, l'un à la surface extérieure, l'autre à la surface intérieure du sphéroïde, la différence de l'action de la couche sur les deux points sera proportionnelle à son épaisseur, et la même que si la couche était sphérique.

23. Considérons présentement un sphéroïde hétérogène peu différent de la sphère, et composé de couches homogènes dont la figure et la densité varient suivant une loi quelconque. Soit $a(1+\alpha y)$ le rayon d'une de ces couches; si l'on développe y en série $Y_0+Y_1+Y_2+$ etc., les quantités Y_0, Y_1, Y_2, etc., seront des fonctions de a variables d'une couche à une autre; et en différenciant par rapport à a la première des équations (m), on aura pour la valeur de V relative à la couche dont l'épaisseur est $da+\alpha.day$, et dont nous représenterons par ρ la densité,

$$\frac{4\pi}{3r}.\rho da^3+\frac{4\pi\alpha}{r}.\rho d.\left(a^3.Y_0+\frac{a^4}{3r}.Y_1+\frac{a^5}{5r^2}.Y_2+\text{etc.}\right).$$

Si l'on regarde, dans cette différentielle, ρ comme une fonction de a, et qu'on intègre relativement à cette variable, on aura pour la valeur de V qui se rapporte au sphéroïde entier,

$$V=\frac{4\pi}{3r}.\int\rho.d.a^3+\frac{4\pi\alpha}{r}.\int\rho.d.\left(a^3.Y_0+\frac{a^4}{3r}.Y_1+\text{etc.}\right).$$

Les intégrales devront être étendues depuis $a = 0$ jusqu'à $a = a'$, en nommant a' la valeur de a correspondante à la surface.

Pour avoir l'attraction du sphéroïde hétérogène sur un point intérieur faisant partie de la couche dont le rayon est $a(1 + \alpha y)$, on emploiera la première des formules (n) depuis $a = 0$ jusqu'à la valeur de a répondant à cette couche, et la première des formules (p), depuis cette valeur de a jusqu'à $a = a'$, cette dernière valeur se rapportant à la surface. Si, après avoir différencié ces équations par rapport à a, on les multiplie ensuite par ρ, et qu'on intègre leur somme, on aura

$$\mathrm{V} = \frac{4\pi}{3r}.\int \rho.da^3 + \frac{4\pi\alpha}{r}.\int \rho.d.\left(a^3.\mathrm{Y}_0 + \frac{a^4}{3r}.\mathrm{Y}_1 + \frac{a^5}{5r^2}.\mathrm{Y}_2 + \text{etc.}\right)$$

$$+ 2\pi.\int \rho.da^2 + 4\pi\alpha.\int \rho.d.\left(a.\mathrm{Y}_0 + \frac{ar}{3}.\mathrm{Y}_1 + \frac{r^2}{5}.\mathrm{Y}_2 + \text{etc.}\right).$$

Cette valeur représente l'attraction du sphéroïde hétérogène sur les points intérieurs. Les deux premières intégrales devront être prises depuis $a = 0$ jusqu'à $a = a$, et les deux dernières depuis $a = a$ jusqu'à $a = a'$. Il faudra en outre, après les intégrations, substituer a au lieu de r, dans les termes multipliés par α, et $\frac{1 - \alpha y}{a}$ au lieu de $\frac{1}{r}$, dans les termes qui sont indépendans de α.

24. Il nous reste à montrer comment on peut parvenir à développer la fonction $y = f(\mu, \omega)$ dans une série de la forme $\mathrm{Y}_0 + \mathrm{Y}_1 + \mathrm{Y}_2 +$ etc., les quantités Y_0, Y_1, Y_2, etc., étant déterminées par la condi-

tion de satisfaire à l'équation

$$\frac{d.\left[(1-\mu^2).\frac{dY_i}{d\mu}\right]}{d\mu}+\frac{\frac{d^2Y_i}{d\omega^2}}{1-\mu^2}+i(i+1)Y_i=0.$$

Si l'on désigne par K_n le coefficient de $\cos n\omega$ dans la valeur de Y_i, on aura

$$\frac{d.\left[(1-\mu^2).\frac{dK_n}{d\mu}\right]}{d\mu}+\frac{n^2K_n}{1-\mu^2}+i(i+1)K_n=0,$$

et la valeur la plus générale de K_n qui satisfera à cette équation, sera l'expression de P_i du n° 17, en la multipliant par une constante arbitraire; c'est-à-dire qu'on aura

$$K_n=A_n(1-\mu^2)^{\frac{n}{2}}.\left[\mu^{i-n}-\frac{(i-n)(i-n-1)}{2(2i-1)}.\mu^{i-n-2}+\text{etc.}\right].$$

On aura donc, pour la partie de Y_i dépendante de l'angle $n\omega$,

$$(1-\mu^2)^{\frac{n}{2}}.\left[\mu^{i-n}-\frac{(i-n)(i-n-1)}{2(2i-1)}\mu^{i-n-2}+\text{etc.}\right].(A_n\sin n\omega+B_n\cos$$

A_n et B_n étant deux constantes arbitraires.

Si l'on fait successivement $n=0$, $n=1$, $n=2\ldots n=i$ dans cette expression, et qu'on ajoute entre elles toutes les fonctions qui en résulteront, leur somme sera l'expression de Y_i, qui renfermera, comme on voit, $2i+1$ arbitraires, B_0, A_1, B_1, etc. Si l'on suppose ensuite $i=0$, $i=1$, etc., on aura les valeurs des fonctions Y_0, Y_1, etc., et leur somme $Y_0+Y_1+Y_2\ldots\ldots+Y_s$ renfermera $(s+1)^2$ constantes indéterminées.

Soit maintenant S une fonction donnée, rationnelle et entière, des trois coordonnées rectangulaires x, y, z, qu'il s'agit de développer en série de la forme $Y_0 + Y_1 + Y_2 +$ etc. Voici le moyen qu'on emploiera pour y parvenir. Si l'on transforme les variables x, y, z en trois autres r, μ, ω, déterminées comme dans le n° 4, on aura

$$x = r\mu, \quad y = r.\sqrt{1-\mu^2}.\cos\omega, \quad z = r.\sqrt{1-\mu^2}.\sin\omega,$$

en substituant ces valeurs dans S, cette quantité deviendra fonction rationnelle et entière de μ, $\sqrt{1-\mu^2}\cos\omega$ et $\sqrt{1-\mu^2}\sin\omega$, et l'on pourra la développer en fonction des sinus et des cosinus de l'angle ω et de ses multiples. Si l'on suppose donc que S soit la fonction la plus générale de l'ordre s, $\sin n\omega$ et $\cos n\omega$, dans ce développement, seront multipliés par des fonctions de la forme

$$(1-\mu^2)^{\frac{n}{2}}.(A\mu^{s-n} + B\mu^{s-n-1} + C\mu^{s-n-2} + \text{etc.});$$

d'où l'on voit que la partie de S dépendante de l'argument $n\omega$ renfermera $2(s-n+1)$ arbitraires. La partie de S qui dépend de l'angle ω et de ses multiples, renfermera donc $s(s+1)$ indéterminées; la partie indépendante de l'angle ω en renfermera $s+1$; la fonction S contiendra donc $(s+1)^2$ constantes indéterminées.

La fonction $Y_0 + Y_1 + Y_2 \ldots + Y_s$ renferme pareillement $(s+1)^2$ arbitraires; il sera donc toujours possible de transformer S dans une fonction de cette forme.

Pour cela, on prendra l'expression la plus générale de Y_s, on la retranchera de S, et l'on déterminera les arbitraires de manière que les puissances et les produits de μ et de $\sqrt{1-\mu^2}$ de l'ordre s disparaissent de la différence $S-Y_s$, qui deviendra ainsi une fonction de l'ordre $s-1$, que l'on désignera par S'. On prendra l'expression la plus générale de $Y_{(s-1)}$ et on la retranchera de S'; on déterminera les arbitraires de manière que les puissances et les produits de μ et de $\sqrt{1-\mu^2}$ de l'ordre $s-1$ disparaissent de la différence $S'-Y_{(s-1)}$, et ainsi de suite. On déterminera successivement de cette manière les fonctions Y_s, $Y_{(s-1)}$, $Y_{(s-2)}$, etc., dont la somme représente S.

CHAPITRE IV.

De la figure d'une masse fluide homogène en équilibre, et douée d'un mouvement de rotation.

25. Après avoir développé, dans les chapitres qui précèdent, les formules générales des attractions des sphéroïdes, nous allons les faire servir à la détermination de la figure d'une masse fluide tournant autour d'un axe fixe, et sollicitée par les attractions de toutes ses parties et par la force centrifuge due au mouvement de rotation. Nous supposerons d'abord le fluide homogène : cette question est alors susceptible d'une solution rigoureuse.

Soient a, b, c les trois coordonnées d'un point quelconque de la surface du fluide, P, Q, R les forces accélératrices qui agissent sur ce point, décomposées parallèlement aux axes des coordonnées; prenons pour axe des x l'axe même de rotation; désignons par n la vitesse angulaire commune à tous les points de la masse, et par $r = \sqrt{b^2+c^2}$ la distance à l'axe de rotation du point dont les coordonnées sont a, b, c. La vitesse absolue de ce point sera rn, et rn^2 sera la

force centrifuge qui l'anime : on aura donc, n° 39, livre I[er], pour l'équation de l'équilibre,

$$Pda + Qdb + Rdc - n^2rdr = 0,$$

et cette équation représentera aussi celle de la surface extérieure du fluide.

Supposons maintenant que les seules forces accélératrices qui agissent sur lui soient les attractions mutuelles de ses élémens ; on aura

$$P = -\frac{dV}{da}, \quad Q = -\frac{dV}{db}, \quad R = -\frac{dV}{dc},$$

V désignant la même fonction que dans le n° 1.

L'équation de l'équilibre deviendra donc

$$\frac{dV}{da} \cdot da + \frac{dV}{db} \cdot db + \frac{dV}{dc} \cdot dc + n^2rdr = 0. \quad (1)$$

La valeur de V dépend de la nature du fluide et de la disposition de ses élémens. On ne peut donc pas déterminer *à priori* la surface de l'équilibre au moyen de l'équation précédente ; mais cette équation servira à indiquer, parmi les hypothèses arbitraires que l'on peut faire sur la figure de la masse fluide, celles qui satisfont aux conditions de l'équilibre.

Considérons d'abord une masse fluide homogène à laquelle nous supposerons la figure d'un ellipsoïde dont l'axe des x est l'axe même de rotation ; plaçons l'origine des coordonnées au centre de la masse ; l'équation de la surface sera alors

$$\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{h'^2} + \frac{c^2}{h''^2} = 1.$$

Dans les ellipsoïdes homogènes, on a, n° 9,

$$-\frac{dV}{da}=\alpha a,\quad -\frac{dV}{db}=\mathit{6}b,\quad -\frac{dV}{dc}=\gamma c,$$

α, $\mathit{6}$, γ désignant des quantités indépendantes des trois coordonnées a, b, c. En substituant ces valeurs dans l'équation (1), et en observant que la valeur de r donne $rdr=bdb+cdc$, on aura

$$\alpha.ada+(\mathit{6}-n^2).bdb+(\gamma-n^2).cdc=0.$$

L'équation de l'ellipsoïde, en la différenciant, donne

$$\frac{ada}{h^2}+\frac{bdb}{h'^2}+\frac{cdc}{h''^2}.=0.$$

Pour que ces deux équations coïncident, il faut qu'on ait

$$\frac{h'^2}{h^2}=\frac{\alpha}{\mathit{6}-n^2},\qquad \frac{h''^2}{h^2}=\frac{\alpha}{\gamma-n^2};\qquad (a)$$

d'où l'on tire

$$\mathit{6}h'^2-\gamma h''^2=n^2.(h'^2-h''^2).$$

Le second membre de cette équation est indépendant du troisième axe h de l'ellipsoïde; il faut donc que le premier le soit pareillement. Or, si l'on remplace $\mathit{6}$ et γ par leurs valeurs données n° 10, on verra que, pour satisfaire à cette condition, il faut nécessairement supposer $h'=h''$; alors l'ellipsoïde est de révolution autour de l'axe des x; on a par conséquent $\mathit{6}=\gamma$, et les équations (a) se réduisent à la suivante :

$$\frac{\alpha}{\mathcal{E}-n^2} = \frac{h'^2}{h^2}. \qquad (b)$$

Si h est le plus petit des trois axes, l'ellipsoïde est aplati ; dans le cas contraire, il est allongé vers les pôles. Supposons d'abord le sphéroïde aplati, et faisons comme dans le n° 9, $\frac{h'^2-h^2}{h^2} = \lambda^2$, d'où l'on tire $\frac{h'^2}{h^2} = 1 + \lambda^2$; on a d'ailleurs, en désignant par M la masse de l'ellipsoïde, et nommant ρ la densité, $M = \frac{4}{3}\pi\rho h h'^2$, ou bien $M = \frac{4}{3}\pi\rho\,.\,(1+\lambda^2).h^3$. Les formules du n° 10 donneront donc ainsi

$$\alpha = 4\pi\rho\,.\,\frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}\,.\,(\lambda - \text{arc. tang}\,\lambda),$$

$$\mathcal{E} = 2\pi\rho\,.\,\frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}\,.\left(\text{arc. tang}\,\lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right).$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'équation (b), et que, pour abréger, on fasse $\frac{n^2}{\frac{4}{3}\pi\rho} = q$, on en tire

$$\text{arc. tang}\,\lambda = \frac{9\lambda + 2q\lambda^3}{9+3\lambda^2}. \qquad (2)$$

Cette équation étant résolue par rapport à λ, donnera le rapport des deux axes de l'ellipsoïde. Si la valeur de cette quantité est réelle, il y aura toujours, pour une valeur de n donnée, une figure elliptique qui répondra à l'état d'équilibre ; si elle est imaginaire, l'équilibre de la masse fluide ne pourra point exister avec une pareille figure. Enfin,

s'il y a plusieurs valeurs de λ qui conviennent à l'équation (2), il y aura aussi plusieurs figures d'équilibre correspondantes à un même mouvement de rotation.

26. Il convient donc de discuter avec soin l'équation (2), et comme elle est transcendante, il faut pour cela recourir aux considérations géométriques, qui sont très utiles dans ces sortes d'occasions. Faisons donc

$$\varphi = \frac{9\lambda + 2q\lambda^3}{9 + 3\lambda^2} - \text{arc. tang}\, \lambda, \qquad (3)$$

et regardons φ comme l'ordonnée d'une courbe dont λ représente l'abscisse. On voit d'abord que si l'on change le signe de λ, l'ordonnée φ conserve, au signe près, la même valeur : d'où il suit que la courbe que représente l'équation (3) est semblable du côté des abscisses positives et du côté des abscisses négatives ; ses deux branches couperont donc l'axe des abscisses à des distances égales de l'origine, et donneront les mêmes figures de l'équilibre. Il suffira par conséquent de considérer la partie qui répond aux abscisses positives. Cela posé, si l'on fait croître λ depuis $\lambda = 0$ jusqu'à $\lambda = \infty$, l'ordonnée φ commence et finit par être positive ; d'où il suit qu'entre ces deux limites la courbe coupe un nombre de fois pair l'axe des abscisses, et que par conséquent il y a toujours au moins deux valeurs de λ qui satisfont à l'équilibre.

En différenciant l'équation (3), on trouve

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{6\lambda^2.[q\lambda^4 + (10q - 6)\lambda^2 + 9q]}{(1+\lambda^2)(9+3\lambda^2)^2}, \qquad (4)$$

et la supposition de $d\varphi = 0$ donne

$$q\lambda^4 + (10q - 6)\lambda^2 + 9q = 0;$$

d'où l'on tire

$$\lambda^2 = \frac{3}{q} - 5 \pm \sqrt{\left(\frac{3}{q} - 5\right)^2 - 9}. \qquad (5)$$

Ce sont les valeurs de λ^2 qui correspondent aux valeurs *maxima* et *minima* de l'ordonnée φ. Comme ces valeurs ne sont qu'au nombre de deux, il est clair que φ n'a qu'un *maximum* et un *minimum* du côté des abscisses positives, ce qui exige que la courbe ne coupe l'axe des abscisses qu'en trois points, en y comprenant l'origine. Il n'y a donc que deux valeurs de λ^2 qui répondent à l'équilibre.

L'équation (5) détermine aussi une limite des valeurs de q, au-delà de laquelle l'équilibre n'est plus possible avec une figure elliptique. En effet, si l'on suppose

$$\frac{3}{q} - 5 = 3,$$

il est clair qu'en donnant à q une valeur plus grande que celle qui est déterminée par cette équation, la valeur de λ^2 qui en résultera sera imaginaire ; les ordonnées φ ne seront donc susceptibles ni de *maximum* ni de *minimum*, et la courbe ne coupera jamais l'axe des abscisses. L'équation précédente donne

$$q = 0.3750, \quad \text{d'où l'on tire} \quad \lambda = 1.7322;$$

mais on peut assigner à ces deux quantités des limites plus approchées.

Pour cela, j'observe qu'il peut arriver que la courbe soit simplement tangente à l'axe des abscisses sans le toucher ; on a alors à la fois $d\varphi = 0$ et $\varphi = 0$.

La première de ces équations donne

$$q = \frac{6\lambda^2}{(1+\lambda^2)(9+\lambda^2)},$$

et cette valeur, substituée dans l'équation (3), donne

$$\text{arc. tang}\,\lambda = \frac{7\lambda^5 + 30\lambda^3 + 27\lambda}{(1+\lambda^2)(3+\lambda^2)(9+\lambda^2)} = \frac{7\lambda^3 + 9\lambda}{(1+\lambda^2)(9+\lambda^2)}.$$

Cette dernière équation, en la résolvant par approximation, donne

$$\lambda = 2.5292, \quad \text{d'où l'on tire} \quad q = 0.33701,$$

le rapport de l'axe de l'équateur à l'axe des pôles étant exprimé par la quantité $\sqrt{1+\lambda^2}$, il est, dans ce cas, égal à 2.7197.

Nous avons supposé généralement $q = \frac{n^2}{\frac{4}{3}\varpi\rho}$; soit T le nombre de secondes que l'ellipsoïde emploie à faire une révolution autour de son axe, $\frac{2\pi}{T}$ sera la vitesse dont est animée la molécule située à l'unité de distance de l'axe de rotation, et la force centrifuge de cette molécule sera $\frac{4\pi^2}{T^2}$; on aura donc

$$q = \frac{\frac{4\pi^2}{T^2}}{\frac{4}{3}\pi\rho}.$$

Il suit de là que, pour les masses de même densité, les quantités q sont proportionnelles à la force centrifuge correspondante au mouvement de rotation, ou en raison inverse du carré du temps de la rotation. La valeur de q par rapport à la Terre est de 0,00344957, et la durée de la rotation de cette planète de $0^j,99727$; d'où l'on peut conclure que pour une masse fluide de même densité que la Terre, la durée de la rotation, correspondante à la limite 0,33701 de q, serait de $0^j,10090$. La masse fluide ne pourra donc pas être en équilibre avec une figure elliptique, si le temps de sa rotation est moindre que $0^j,10090$; et s'il surpasse cette limite, il y aura toujours deux figures elliptiques, mais non davantage, qui satisferont aux conditions d'équilibre.

27. Nous avons supposé jusqu'ici l'ellipsoïde aplati aux pôles; voyons maintenant si l'équilibre pourrait exister avec une figure elliptique allongée vers les pôles. Il faut, dans ce cas, faire λ^2 négatif; soit donc $\lambda^2 = -\lambda'^2$, la quantité λ'^2 étant supposée positive et plus petite que l'unité, parce que sans cela $\sqrt{1+\lambda'^2}$ devenant imaginaire, l'ellipsoïde se changerait en un hyperboloïde. Si à la place de λ on substitue sa valeur $\pm\lambda'\sqrt{-1}$ dans l'équation (4), on trouve

$$\frac{d\varphi}{d\lambda'} = \pm\sqrt{-1}.\frac{6\lambda'^2.[(1-\lambda'^2)(9-\lambda'^2).q+6\lambda'^2]}{(1-\lambda'^2)(9-3\lambda'^2)^2},$$

et pour que l'ordonnée φ soit un *maximum*, il faudra supposer

$$(1-\lambda'^2)(9-\lambda'^2)q+6\lambda'^2=0.$$

Or, il est évident que tous les termes de cette équation étant positifs lorsqu'on donne à λ'^2 une valeur comprise entre $\lambda'^2=0$ et $\lambda'^2=1$, cette équation est alors impossible : la courbe ne coupe donc jamais l'axe des abscisses entre ces limites; il n'y a donc pas d'équilibre possible avec une figure elliptique allongée vers les pôles.

28. Considérons maintenant les variations de la pesanteur à la surface de l'ellipsoïde. La pesanteur est la résultante de toutes les forces qui agissent sur un point matériel placé à cette surface. Soit p cette résultante; en désignant comme précédemment par $a\alpha$, $b\mathcal{C}$, $c\gamma$ les attractions de l'ellipsoïde, par n sa vitesse de rotation, on aura

$$p=\sqrt{a^2\alpha^2+b^2(\mathcal{C}-n^2)^2+c^2(\gamma-n^2)}.$$

Il résulte d'abord de cette équation, que la pesanteur aux différens points d'un rayon du sphéroïde est proportionnelle à leurs distances du centre; en sorte que si l'on connaît la pesanteur à la surface, on aura immédiatement celle qui s'exerce dans l'intérieur de l'ellipsoïde.

Considérons en particulier l'ellipsoïde de révolution : on a, dans ce cas,

$$p=\sqrt{a^2\alpha^2+(b^2+c^2)(\mathcal{C}-n^2)^2},$$

d'où, en vertu de l'équation (b), on tire

$$p = \alpha\sqrt{a^2 + (b^2 + c^2).\frac{h^4}{h'^4}}.$$

On a d'ailleurs, par l'équation de l'ellipsoïde,

$$\frac{b^2 + c^2}{h'^2} = 1 - \frac{a^2}{h^2},$$

par conséquent,

$$p = \frac{\alpha}{h'}\sqrt{a^2(h'^2 - h^2) + h^4}.$$

A l'équateur, on a $a = 0$, et par suite $p = \frac{\alpha h^2}{h'}$; aux pôles, on a $a = h$ et $p = \alpha h$; la pesanteur à l'équateur est donc à la pesanteur aux pôles, comme le diamètre de l'équateur est à l'axe des pôles.

29. Déterminons la relation qui existe en général à la surface de l'ellipsoïde entre la pesanteur et la latitude. Si l'on nomme t la normale à l'ellipsoïde prolongée jusqu'à la rencontre de l'axe de révolution, et qu'on prenne pour plan des x, y, le méridien passant par le point de l'ellipsoïde que l'on considère, on aura, en nommant a et b les coordonnées de ce point,

$$t = b.\sqrt{1 + \frac{db^2}{da^2}} = \frac{h'}{h^2}.\sqrt{a^2.(h'^2 - h^2) + h^4}.$$

On aura donc

$$p = \frac{h^2 \alpha t}{h'^2};$$

d'où il suit que la pesanteur est proportionnelle à la

normale de l'ellipsoïde prolongée jusqu'à l'axe de révolution.

Nommons ψ le complément de l'angle compris entre la normale et l'axe de révolution; ψ sera la latitude du point de l'ellipsoïde que l'on considère; on aura ainsi $b = \frac{t}{\cos\psi}$. Si l'on substitue cette valeur dans l'équation de l'ellipse, et qu'ensuite on élimine, à l'aide de l'équation résultante, a de la valeur précédente de t, on trouvera

$$t = \frac{h'^2}{h\sqrt{1 + \frac{h'^2 - h^2}{h^2}.\cos^2\psi}};$$

on aura donc

$$p = \frac{h\alpha}{\sqrt{1 + \frac{h'^2 - h^2}{h^2}.\cos^2\psi}}.$$

Si dans cette équation on substitue pour α sa valeur, et $1 + \lambda^2$ à la place de $\frac{h'^2 - h^2}{h^2}$, on trouvera

$$p = \frac{4\pi\rho.h.(1+\lambda^2).(\lambda - \text{arc.tang}\,\lambda)}{\lambda^3.\sqrt{1+\lambda^2\cos^2\psi}}.$$

On aura, au moyen de cette équation, la pesanteur correspondante à une latitude donnée; il ne s'agit plus, pour en faire usage, que de déterminer les constantes qu'elle renferme.

En nommant T le nombre de secondes que l'ellipsoïde emploie à faire une révolution autour de son axe, nous avons trouvé, n° 26, $q = \frac{\frac{4\pi^2}{T^2}}{\frac{4}{3}\pi\rho}$; on tire de là

$$4\pi\rho = \frac{12\pi^2}{qT^2}.$$

Soit c la longueur d'un degré du méridien, mesuré à la latitude ψ; le rayon osculateur de ce méridien est, par la nature de l'ellipse, $\frac{(1+\lambda^2)h}{(1+\lambda^2\cos^2\psi)^{\frac{3}{2}}}$. On aura par conséquent

$$\frac{(1+\lambda^2)h\pi}{(1+\lambda^2\cos^2\psi)^{\frac{3}{2}}} = 180^\circ . c; \qquad (6)$$

et cette équation, combinée avec la précédente, donnera

$$\frac{4\pi\rho h(1+\lambda^2)}{\sqrt{1+\lambda^2\cos^2\psi}} = 180^\circ . c . (1+\lambda^2\cos^2\psi) . \frac{12\pi}{qT^2}.$$

La valeur de p deviendra ainsi

$$p = 180^\circ . c . (1+\lambda^2\cos^2\psi) . \frac{\lambda - \text{arc.tang}\,\lambda}{\lambda^3} . \frac{12\pi}{qT^2};$$

équation qui ne renferme plus que q d'inconnu. Si l'on nomme l la longueur du pendule simple qui fait ses oscillations dans une seconde de temps, on aura, n° 17, livre Ier, $p = \pi^2 l$. En substituant pour p cette valeur, l'équation précédente donnera, pour déterminer q,

$$q = \frac{2160 . c . (1+\lambda^2\cos^2\psi) . (\lambda - \text{arc.tang}\,\lambda)}{\pi\lambda^3 l T^2}.$$

Cette équation, combinée avec l'équation (3) du n° 26, fera connaître la valeur de q, et celle de

λ, au moyen de la longueur du pendule à secondes et de la grandeur du degré, observées l'une et l'autre à la latitude ψ.

Supposons $\psi = 45°$ et q une très petite quantité, comme cela a lieu pour la Terre; ces équations donneront, en les développant,

$$q = \frac{720.c}{\pi l T^2} - \frac{1}{4}.\left(\frac{720.c}{\pi l T^2}\right)^2 + \text{etc.},$$
$$\lambda^2 = \frac{5}{2}.q + \frac{75}{14}.q^2 + \text{etc.}$$

On a trouvé, par la mesure de l'arc du méridien terrestre, et par l'observation du pendule qui bat les secondes sous le parallèle de 45°,

$$c = 111111^{m}, \quad l = 0^{m},993452.$$

On a de plus $T = 86164''$; on conclura de là

$$q = 0.0034496; \quad \lambda^2 = 0.0086877.$$

Cette dernière valeur donne $\sqrt{1+\lambda^2} = 1.0043344$; c'est le rapport de l'axe de l'équateur à celui du pôle; ces deux axes sont à très peu près entre eux comme 231,7 est à 230,7, et les pesanteurs à l'équateur et aux pôles sont, comme on l'a vu n° 28, dans le même rapport.

On peut encore déterminer le demi grand axe h du pôle au moyen de l'équation (6). En effet, en faisant $\psi = 45°$, on en tire

$$h = \frac{180°.c.(1+\frac{1}{2}\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}{\pi(1+\lambda^2)} = \frac{180°.c}{\pi}.(1 - \tfrac{1}{4}\lambda^2 - \text{etc.});$$

d'où il résulte, en réduisant cette formule en nombres,

$$h = 6352534^{m}.$$

Il est à remarquer que la limite que nous avons trouvée pour q, n° 26, n'est pas, comme on aurait pu l'imaginer, celle où le fluide commencerait à se dissiper en vertu d'un mouvement de rotation trop rapide. En effet, on a vu, n° 28, que la pesanteur à l'équateur est à la pesanteur au pôle dans le même rapport que le diamètre de l'équateur est à l'axe du pôle; rapport qui, dans ce cas, est celui de 1 à 2,7197; d'où il faut conclure que si, au-delà de la limite 0,33701 de q, l'équilibre ne peut subsister avec une figure elliptique, c'est qu'il est alors impossible de donner à la masse fluide une figure elliptique telle, que la résultante de ses attractions et de la force centrifuge, soit perpendiculaire à sa surface.

30. Nous venons de voir, n° 26, que, pour un mouvement de rotation donné, il sera toujours possible d'assigner deux figures elliptiques qui satisferont aux conditions d'équilibre; mais il n'en faut pas conclure que ces deux états d'équilibre correspondent à la même force d'impulsion primitive, parce que le mouvement de rotation que prend la masse fluide dépend non-seulement de l'intensité de cette force, mais encore de la manière dont elle lui est appliquée.

En effet, considérons une masse fluide agitée primitivement par des forces d'impulsion quelconques, et ensuite abandonnée à elle-même et à l'attraction mutuelle de toutes ses parties. Par le centre de gra-

vité de la masse, concevons un plan qui soit celui par rapport auquel la somme des aires tracées par chacune des molécules du fluide multipliées par leurs masses est un *maximum;* ce plan conservera sans cesse cette propriété, et lorsque, après diverses oscillations du fluide, son mouvement deviendra un mouvement uniforme de rotation autour d'un axe fixe, l'équateur de la masse se confondra avec le plan *maximum* des aires, et l'axe de rotation sera perpendiculaire à ce plan. Soit donc Hdt la somme des aires décrites pendant l'instant dt, à l'époque où la masse commence à s'agiter, par les projections de chacune des molécules fluides sur ce plan, multipliées par les masses de ces molécules; cette somme restera constamment la même pendant toute la durée du mouvement. Or si l'on désigne, comme nous l'avons fait, par n, la vitesse angulaire de rotation commune à toutes les molécules de la masse, et par $\sqrt{b^2+c^2}$ la distance de la molécule dm à l'axe de rotation, l'aire décrite par cet élément, projetée sur le plan de l'équateur et multipliée par sa masse, au bout du temps dt, sera $\frac{ndt}{2}(b^2+c^2)dm$. On aura donc

$$\frac{n}{2}.\mathrm{S}.(b^2+c^2)\,dm = \mathrm{H},$$

l'intégrale S devant s'étendre à la masse entière du fluide.

Or S.$(b^2+c^2)dm$ est le moment d'inertie de la masse relative à l'axe de révolution. Par la nature des ellipsoïdes, ce moment est égal à $\frac{8\pi\varrho}{15}.h^5.(1+\lambda^2)^2$.

On aura donc

$$\frac{4\pi\rho}{15}.h^5.(1+\lambda^2)^2.n = \text{H}.$$

D'ailleurs, en désignant par M la masse du fluide, on a

$$\frac{4\pi\rho}{3}.h^3.(1+\lambda^2) = \text{M}.$$

Au moyen de ces deux équations, on trouve

$$\frac{n^2}{\frac{4}{3}\pi\rho} = \frac{25\text{H}^2\left(\frac{4\pi\rho}{3}\right)^{\frac{1}{3}}(1+\lambda^2)^{-\frac{2}{3}}}{\text{M}^{\frac{10}{3}}}.$$

Nous avons représenté par q cette quantité, dans le n° 25; en faisant donc $q' = \frac{25\text{H}^2(\frac{4}{3}\pi\rho)^{\frac{1}{3}}}{\text{M}^{\frac{10}{3}}}$, on aura $q = q'(1+\lambda^2)^{-\frac{2}{3}}$, et l'équation (2) du même numéro deviendra

$$\frac{9\lambda+2q'\lambda^3(1+\lambda^2)^{-\frac{2}{3}}}{9+3\lambda^2} - \text{arc}.\text{tang}\,\lambda = 0.$$

On déterminera λ au moyen de cette équation, et en substituant sa valeur dans l'expression de M, on en déduira la valeur de h.

Nommons φ la fonction que représente le premier membre de l'équation précédente; cette fonction doit être égale à zéro, pour satisfaire aux conditions d'équilibre; elle commence par être positive si l'on suppose très petite la valeur de λ, et elle devient négative lorsqu'on suppose λ infini. Il y a donc tou-

jours entre ces deux limites une valeur de λ qui satisfait à l'équation $\varphi = 0$. Par conséquent, quel que soit q', il y a toujours une figure elliptique qui convient à l'équilibre de la masse fluide.

En différenciant la valeur de φ, on trouve

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{2\lambda^4 . \left\{\frac{27q'}{\lambda^2} + 18q' - [\lambda^2 q' + 18(1+\lambda^2)^{\frac{2}{3}}]\right\}}{(3\lambda^2 + 9)^2 \, (1+\lambda^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

La valeur de λ qui correspond à $\varphi = 0$ rend négative la fonction

$$\frac{27q'}{\lambda^2} + 18q' - [\lambda^2 q' + 18\,(1+\lambda^2)^{\frac{2}{3}}].$$

Cette fonction conserve ensuite toujours le même signe à mesure qu'on fait croître la valeur de λ, parce que la partie positive $\frac{27q'}{\lambda^2} + 18q'$ diminue sans cesse, tandis que la partie négative $-[\lambda^2 q' + 18(1+\lambda^2)^{\frac{2}{3}}]$ augmente. La courbe dont φ représente l'ordonnée ne peut donc couper une seconde fois l'axe des abscisses, et par conséquent il n'y a qu'une seule valeur de λ qui satisfasse aux conditions de l'équilibre.

31. Concluons donc de ce qui précède : 1°. *qu'une masse fluide homogène, douée d'un mouvement de rotation autour d'un axe fixe, peut toujours être en équilibre avec deux figures elliptiques différentes;* 2°. *que pour une même force d'impulsion primitive, il n'y a qu'une seule figure elliptique qui satisfasse à l'équilibre.*

Le premier de ces résultats suppose que la durée

de la rotation de la masse fluide n'est pas au-dessous de la limite que nous lui avons assignée n° 26; mais quand bien même cette condition ne serait pas remplie à l'origine du mouvement, il n'en faudrait pas conclure que l'équilibre sera à jamais impossible avec une figure elliptique. On conçoit, en effet, que la masse fluide, après diverses oscillations, peut s'aplatir de plus en plus sans cesser d'être continue, en vertu de la tenacité de ses parties. La durée de la rotation augmente ainsi progressivement, et elle finit par atteindre la limite qui convient à l'équilibre. La masse fluide prend alors la figure d'un ellipsoïde; et l'on voit, en effet, par le second des théorèmes précédens, qui a toute l'étendue possible, que, quelles que soient les forces primitivement imprimées à ce fluide, on peut toujours assigner une figure elliptique qui satisfasse à son équilibre. En général, cette figure est unique, et elle est déterminée par la nature des forces qui ont produit le mouvement. L'axe de rotation est celui des axes passant par le centre de gravité de la masse, par rapport auquel la somme des momens des forces primitives du système était un *maximum*.

CHAPITRE V.

De la figure qui convient à l'équilibre d'une masse fluide homogène douée d'un mouvement de rotation, et dont la figure primitive est supposée très peu différente de la sphère.

32. Nous venons de démontrer que l'ellipsoïde de révolution satisfait aux conditions d'équilibre d'une masse fluide homogène douée d'un mouvement de rotation autour d'un axe fixe, et nous avons développé les lois que suit la pesanteur et la diminution des degrés du méridien à la surface d'un semblable sphéroïde. Il nous reste à examiner maintenant si la surface elliptique est la seule qui remplisse les conditions précédentes, et s'il existe plusieurs figures de différentes natures qui conviennent à l'équilibre. Cette question, dans toute sa généralité, surpasse les forces de l'Analyse; mais on parvient à la résoudre en la restreignant et en supposant la figure de la masse fluide très peu différente de la sphère. Cette hypothèse est d'ailleurs conforme à la nature, puisque tous les corps célestes ont, à très peu près, la forme sphérique, et qu'on peut présumer que leurs molécules, en se rapprochant par la

condensation, ont conservé entre elles la même disposition qu'elles avaient à l'état fluide.

Reprenons l'équation de l'équilibre d'une masse fluide homogène trouvée, n° 38, livre I[er], et donnons-lui cette forme

$$V + N = \text{const.}, \qquad (a)$$

N représentant généralement l'intégrale de toutes les forces étrangères aux attractions du sphéroïde qui agissent sur les points de sa surface. Si l'on suppose, comme cela a lieu pour la Terre, la Lune, Jupiter et tous les corps célestes, Saturne excepté, que la seule force étrangère qui agit sur la masse fluide est la force centrifuge provenant du mouvement de rotation, on aura

$$N = \tfrac{1}{2}.g.(b^2 + c^2),$$

a, b et c désignant les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque de la surface, et g la force centrifuge du point situé à l'unité de distance de l'axe de rotation. g étant d'ailleurs une très petite quantité, parce que la supposition que la masse fluide diffère peu de la forme sphérique, exige que les forces qui l'en écartent soient elles-mêmes très petites.

Plaçons l'origine des coordonnées au centre de gravité de la masse; soient r le rayon vecteur mené de ce centre à la surface, θ l'angle qu'il forme avec l'axe de rotation, et ω l'angle que forme le plan qui passe par le rayon r et par l'axe de rotation avec le plan des x, y, on aura

$$a = r\cos\theta, \quad b = r\sin\theta\cos\omega, \quad c = r\sin\theta\sin\omega.$$

La valeur de N deviendra ainsi,

$$N = \frac{1}{2}.gr^2\sin^2\theta = \frac{1}{3}.gr^2 - \frac{1}{2}.gr^2.(\cos^2\theta - \frac{1}{3}),$$

et en la substituant dans l'équation d'équilibre, on aura

$$V + \frac{1}{3}gr^2 - \frac{1}{2}gr^2.(\cos^2\theta - \frac{1}{3}) = \text{const.} \quad (b)$$

On verra bientôt pour quelle raison nous avons donné à N la forme précédente.

Supposons maintenant, conformément à l'hypothèse, la figure de la masse fluide peu différente de la sphère; on aura dans ce cas, n° 21,

$$V = \frac{4\pi a^3}{3r} + \frac{4\pi\alpha a^3}{r}.\left[Y_0 + \frac{a}{3r}.Y_1 + \frac{a^2}{5r^2}.Y_2 + \frac{a^3}{7r^3}.Y_3 + \text{etc.}\right].$$

On peut faire disparaître de cette valeur les termes en Y_0 et Y_1 en prenant pour a le rayon de la sphère égal en solidité au sphéroïde, et en plaçant l'origine des rayons r à son centre de gravité. Si l'on substitue ensuite cette valeur dans l'équation (b), on aura

$$\left.\begin{array}{c}\frac{4\pi a^3}{3r} + \frac{4\pi\alpha a^5}{r^3}.\left[\frac{1}{5}.Y_2 + \frac{a}{7r}.Y_3 + \text{etc.}\right] + \frac{1}{3}gr^2 - \frac{1}{2}gr^2.(\cos^2\theta - \frac{1}{3}) \\ = \text{const.},\end{array}\right\}(c)$$

et tous les termes de cette équation jouiront de la propriété de satisfaire à l'équation et aux différences partielles

$$\frac{d.\sin\theta\frac{dY_i}{d\theta}}{\sin\theta d\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}.\frac{d^2Y_i}{d\varpi^2} + r\frac{d^2.rY_i}{dr^2} = 0,$$

Y_i étant une fonction rationnelle et entière des trois quantités μ, $\sqrt{1-\mu^2}\cos\omega$, $\sqrt{1-\mu^2}\sin\omega$ ou $\cos\theta$, $\sin\theta\cos\omega$ et $\sin\theta\sin\omega$, du degré i.

Il est aisé de voir, en effet, que cette équation est satisfaite lorsqu'on y substitue chacun des deux termes $\frac{1}{3}gr^2$ et $-\frac{1}{2}gr^2(\cos^2\theta-\frac{1}{3})$ à la place de Y_i, ce qui résulte de la forme particulière que l'on a fait prendre à la fonction N.

Cela posé, on a à la surface du sphéroïde $r=a(1+\alpha y)$; en substituant cette valeur dans l'équation (c), et en négligeant les termes du second ordre en α, ainsi que ceux qui sont multipliés par αg à cause de la petitesse des deux facteurs, on aura

$$\frac{4\pi a^2}{3}.(1-\alpha y)+4\pi\alpha a^2[\tfrac{1}{5}Y_2Y_3+\tfrac{1}{7}+\text{etc.}]+\tfrac{1}{3}ga^2-\tfrac{1}{2}ga^2.(\cos^2\theta-\tfrac{1}{3})$$
$$=\text{const.}$$

Comme la constante du second membre est arbitraire, on peut la supposer déterminée par l'équation

$$\frac{4\pi a^2}{3}+\tfrac{1}{3}ga^2=\text{const.},$$

et l'équation précédente donnera ainsi

$$y=3.(\tfrac{1}{5}Y_2+\tfrac{1}{7}Y_3+\text{etc.})-\frac{3}{8\pi}.\frac{g}{\alpha}.(\cos^2\theta-\tfrac{1}{3}).$$

Or, nous avons trouvé, n° 21, pour l'expression générale de y dans les sphéroïdes peu différens de la sphère, l'origine des coordonnées étant au centre de gravité du sphéroïde,

$$y = Y_2 + Y_3 + Y_4 + \text{etc.},$$

Y_2, Y_3, Y_4, etc., représentant dans cette expression les mêmes fonctions que celles qu'elles désignent dans la valeur de V.

En comparant ces deux valeurs de y, on voit qu'elles ne sauraient avoir lieu en même temps, à moins qu'on n'ait séparément,

$$Y_2 = \tfrac{3}{5} Y_2 - \frac{3}{8\pi} . \frac{g}{\alpha} . (\cos^2 \theta - \tfrac{1}{3}),$$

$$Y_3 = 0, \ Y_4 = 0, \ Y_5 = 0, \text{ etc:}$$

De la première de ces équations on tire

$$Y_2 = - \tfrac{5}{4} . \frac{g}{\frac{1}{3}\alpha\pi} . (\cos^2 \theta - \tfrac{1}{3}).$$

Substituons cette valeur dans l'expression de y et faisons pour abréger $\frac{g}{\frac{1}{3}\pi} = q$; q désignant comme précédemment le rapport de la force centrifuge à la pesanteur sous l'équateur, on aura

$$\alpha y = - \tfrac{5}{4} q . (\cos^2 \theta - \tfrac{1}{3});$$

on a d'ailleurs

$$r = a (1 + \alpha y).$$

L'expression du rayon de la surface des sphéroïdes deviendra donc

$$r = a . [1 - \tfrac{5}{4} . q . (\cos^2 \theta - \tfrac{1}{3})]. \qquad (d)$$

Cette équation appartient à un ellipsoïde de révolution dont l'aplatissement est très petit et égal à $\frac{5q}{4}$, l'origine des coordonnées étant au centre du sphéroïde.

Nous voici donc parvenu à démontrer que la figure elliptique est la seule qui convienne à l'équilibre d'une masse fluide homogène, douée d'un mouvement de rotation, en supposant la figure primitive de cette masse peu différente de celle de la sphère. Nous avons démontré, dans le n° 21, que l'expression de y ne peut se développer que d'une seule manière, en série de la forme

$$Y_2 + Y_3 + Y_4, \text{ etc.};$$

on peut en conclure encore, par ce qui précède, que la figure elliptique qui satisfait à l'équilibre est unique. Si l'on suppose $q = 0$, dans l'équation (d), on a $r = a$; d'où il suit que la sphère est la seule figure que puisse prendre dans l'état d'équilibre une masse fluide homogène et immobile.

33. Considérons maintenant les variations de la pesanteur à la surface du sphéroïde. L'équation (a), qui détermine la figure de l'équilibre de la masse fluide, offre encore l'avantage de donner par une simple différentiation la loi de la pesanteur à la surface. En effet, le premier membre de cette équation représente généralement l'intégrale de toutes les forces qui agissent sur chacune des molécules de cette surface, multipliées respectivement par l'élément de leurs directions. En différenciant donc l'é-

quation (a) par rapport à r, on aura, n° 1., la résultante de toutes les forces qui animent le point de la surface que l'on considère décomposées parallèlement au rayon r, c'est-à-dire, n° 28, l'expression de la pesanteur en ce point.

L'équation (c), d'après ce qui précède, devient

$$\frac{4\pi a^3}{3r} + \frac{4\pi\alpha a^5}{5r^3}.Y^{(2)} + \frac{4\pi q r^2}{6}.\sin^2\theta = \text{const.}$$

Si l'on différencie cette équation par rapport à r, qu'on divise sa différentielle par $-dr$ et qu'on y substitue à la place de r sa valeur $a(1+\alpha y)$ après la différentiation, on trouve

$$p = \tfrac{4}{3}\pi a.(1 - \tfrac{1}{5}\alpha Y^{(2)} - q\sin^2\theta); \qquad (n)$$

et comme on a, n° 32,

$$\alpha Y^{(2)} = -\tfrac{5}{4}q.(\cos^2\theta - \tfrac{1}{3}),$$

cette équation devient

$$p = \tfrac{4}{3}\pi a.[1 - \tfrac{2}{3}q + \tfrac{5}{4}q(\cos^2\theta - \tfrac{1}{3})]. \quad (c)$$

La quantité p que nous venons de déterminer ne représente pas exactement la pesanteur, c'est seulement la partie de cette force dirigée vers le centre du sphéroïde. En effet, on peut regarder la pesanteur à sa surface comme décomposée en deux autres forces, l'une p dirigée suivant le rayon r, et l'autre perpendiculaire à ce rayon. Mais il est aisé de voir que cette dernière est de l'ordre α, en sorte qu'en la désignant par $\alpha p'$, la pesanteur totale sera égale à

$\sqrt{p^2+\alpha^2 p'^2}$; on peut donc, quand on néglige les quantités de l'ordre α^2, regarder p comme l'expression de la pesanteur à la surface du sphéroïde.

En réunissant les équations (e) et (d), on aura tout ce qui est nécessaire pour déterminer la figure d'équilibre d'une masse fluide homogène douée d'un mouvement de rotation et les lois de la pesanteur à la surface, lorsqu'on suppose que la forme primitive de la masse est peu différente de la sphère. On aura ainsi

$$r = a.\left[1 - \frac{5q}{4}.\left(\cos^2\theta - \tfrac{1}{3}\right)\right],$$
$$p = \tfrac{4}{3}\pi a.\left[1 - \tfrac{2}{3}q + \tfrac{5}{4}q.\left(\cos^2\theta - \tfrac{1}{3}\right)\right].$$

Ces deux équations font voir d'abord que la diminution des rayons et les accroissemens de la pesanteur, en allant de l'équateur au pôle, sont proportionnels à $\cos^2\theta$; d'où il suit que ces deux quantités varient à très peu près comme le carré du sinus de la latitude, parce que $\cos\theta$ est, aux quantités près de l'ordre α, égal à ce sinus.

C'est par l'observation des longueurs du pendule à secondes qu'on a déterminé les variations de la pesanteur à la surface de la Terre. Cette longueur, comme on l'a vu n° 29, est proportionnelle à la pesanteur. Soit donc l la longueur du pendule à secondes sous un parallèle quelconque, L ce que devient l, et P ce que devient p sous l'équateur, ou lorsque $\theta = 90°$, on aura

$$\mathrm{P} = \tfrac{4}{3}\pi a.\left(1 - \tfrac{13}{12}q\right);$$

par conséquent

$$p = P + \tfrac{5}{4} Pq \cos^2 \theta,$$

et par suite,

$$l = L + \tfrac{5}{4} Lq \cos^2 \theta.$$

Nommons l' la longueur du pendule au pôle, on aura

$$\frac{l' - L}{L} = \frac{5q}{4}.$$

Si l'on nomme de même r' et R ce que devient le rayon r de la surface de l'ellipsoïde, au pôle et à l'équateur, on trouve

$$\frac{r' - R}{a} = -\frac{5q}{4};$$

on aura donc, relativement aux ellipsoïdes de révolution, entre les demi grands axes et les longueurs du pendule qui répondent respectivement au pôle et à l'équateur, cette relation remarquable,

$$\frac{l' - L}{L} = \frac{R - r'}{a}.$$

34. Nous ne nous sommes occupé jusqu'ici que des fluides homogènes; nous allons considérer maintenant l'état d'équilibre d'une masse fluide hétérogène douée d'un mouvement de rotation autour d'un axe fixe; mais, pour simplifier cette question, nous supposerons cette masse composée de couches semblables, et la densité décroissante suivant une loi quelconque du centre à la surface, hypothèse qui d'ailleurs paraît conforme à la nature des corps célestes. On conçoit en effet que si, lors de la formation de ces

corps, leurs molécules ne s'étaient pas disposées de manière que les plus denses soient en même temps les plus voisines du centre, elles se seraient pénétrées comme un corps solide s'enfonce dans un fluide, et l'équilibre n'aurait pu exister dans une pareille masse. L'équation générale de l'équilibre des différentes couches sera, n° 38, livre Ier,

$$\int \frac{dp}{\rho} = V + N,$$

ou bien, en remplaçant V par sa valeur, n° 23,

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp}{\rho} = {} & 2\pi . \int \rho d . a^2 + 4\alpha\pi \int \rho . d . \left[a^2 . Y_0 + \frac{ar}{3} . Y_1 + \frac{r^2}{5} . Y_2 + \frac{r^3}{7a} . Y_3 + \text{etc.}\right] \\ & + \frac{4\pi}{3r} \int \rho . d . a^3 + \frac{4\alpha\pi}{r} . \int \rho . d . \left[a^3 . Y_0 + \frac{a^4}{3r} . Y_1 + \frac{a^5}{5r^2} . Y_2 + \frac{a^6}{7r^3} . Y_3 + \text{etc.}\right] \\ & + N. \end{aligned}\right\} (f)$$

Les différentielles et les intégrales dans cette équation se rapportent à la variable a; les deux premières intégrales du second membre devant être prises depuis $a = a$, en désignant par a la valeur de a relative à la couche que l'on considère, jusqu'à la valeur de a qui correspond à la surface du fluide, et que nous supposerons égale à l'unité, les deux dernières intégrales de la même équation devant s'étendre depuis $a = 0$ jusqu'à $a = a$.

A la surface de la couche, on a $r = a(1 + \alpha y)$: en substituant donc cette valeur dans les termes de l'équation précédente qui sont indépendans de α, et faisant simplement $r = a$ dans les autres, on aura

$$\left.\begin{array}{l}\frac{dp}{\rho}=2\pi.\int\rho.da^2+4\alpha\pi.\int\rho.d.[a^2Y_0+\frac{ar}{3}.Y_1+\frac{r^2}{5}.Y_2+\frac{r^3}{7a}.Y_3+\text{etc.}]\\ \frac{4\pi}{3a}.(1-\alpha y).\int\rho.da^3+\frac{4\alpha\pi}{a}.\int\rho.d.[a^3Y_0+\frac{a^4}{3r}.Y_1+\frac{a^5}{5r^2}.Y_2+\frac{a^6}{7r^3}.Y_2+\text{etc.}]\\ \qquad +\text{N}.\end{array}\right\}(g)$$

Le second membre de cette équation doit se réduire à une constante, n° 38, livre Ier. Si l'on substitue donc pour y son développement $Y_0+Y_1+Y_2+$etc., et pour N sa valeur $\frac{1}{3}.gr^2-\frac{1}{2}.gr^2(\cos^2\theta-\frac{1}{3})$, et que l'on compare ensuite les fonctions semblables de θ et de ω, on aura

$$\int\frac{dp}{\rho}=2\pi.\int\rho.d.a^3+4\alpha\pi.\int\rho.d.a^2Y_0+\frac{4\pi}{3a}.\int\rho.d.a^3$$
$$-\frac{4\alpha\pi}{3a}.Y_0.\int\rho.d.a^3+\frac{4\alpha\pi}{a}.\int\rho.d.a^3Y_0+\frac{1}{3}ga^2;$$

les deux premières intégrales du second membre devant être prises depuis $a=a$ jusqu'à $a=1$, et les trois dernières depuis $a=0$ jusqu'à $a=a$. Cette équation déterminant simplement le rapport qui doit exister entre Y_0 et a, il s'ensuit qu'on peut donner à Y_0 une valeur arbitraire. On aura ensuite, i étant égal à 2,

$$\left.\begin{array}{l}\frac{4\alpha\pi a^2}{5}.\int\rho.d.Y_2-\frac{4\alpha\pi}{3a}.Y_2.\int\rho.d.a^3\\ \qquad+\frac{4\alpha\pi}{5a^3}.\int\rho.d.a^5Y_2-\frac{1}{2}ga^2(\cos^2\theta-\frac{1}{3})=0;\end{array}\right\}(h)$$

enfin, i étant un nombre quelconque égal ou supérieur à l'unité,

$$\frac{4\pi a^i}{2i+1}.\int \rho.d.\frac{Y^{(i)}}{a^{i-2}}-\frac{4\pi}{3a}.Y_i.\int \rho.d.a^3+\frac{4\pi}{(2i+1).a^{i+1}}.\int \rho d.a^{i+3}Y_i=0. \quad (m)$$

Cette équation donnera la valeur de Y_i, relative à chaque couche du fluide, lorsque la densité ρ sera connue.

A la surface du fluide, on a $\int \rho.d.\frac{Y_i}{a^{i-2}}=0$, puisque les surfaces intérieures et extérieures de la couche se confondent : l'équation précédente devient donc, en observant que nous supposons $a=1$ à la surface,

$$Y_i.\int \rho.a^2 da-\frac{1}{2i+1}.\int \rho.d.a^{i+3}Y_i=0.$$

Les couches de niveau étant supposées semblables, il s'ensuit que la valeur de Y_i est pour chaque couche la même qu'à la surface ; elle est donc indépendante de a, et l'on a

$$Y_i.\int\left(1-\frac{i+3}{2i+1}a^i\right).\rho a^2\, da=0.$$

Or, i étant égal ou supérieur à 3, la fonction $1-\frac{i+3}{2i+1}a^i$ est toujours positive ; l'intégrale que renferme l'équation précédente ne peut donc être égale à zéro ; on doit donc avoir alors $Y_i=0$. D'ailleurs, si l'on suppose $i=1$, on pourra toujours faire disparaître le terme en Y_1 de l'équation (g) en plaçant l'origine des coordonnées au centre de gravité du sphéroïde ; on aura donc généralement $Y_i=0$, i étant un nombre entier quelconque différent de 2.

Dans le cas de $i=2$, l'équation (h) donne

$$4\alpha\pi Y_2 . \int (1-a^2) . \rho a^2 da + \tfrac{1}{2} g . (\cos^2\theta - \tfrac{1}{3}) = 0.$$

Soit, comme précédemment, q le rapport de la force centrifuge à la pesanteur à l'équateur, l'expression de la pesanteur étant, aux quantités près de l'ordre α, la même que celle qui aurait lieu à la surface de la sphère du rayon a, c'est-à-dire égale à $\frac{4}{3}\pi . \int \rho . d.a^3$, on aura $g = 4\pi q . \int \rho . a^2 da$; par conséquent

$$\alpha Y_2 = \frac{-\frac{q}{2} . (\cos^2\theta - \frac{1}{3}) . \int \rho . a^2 da}{\int (1-a^2) . \rho . a^2 da}.$$

Le rayon du sphéroïde à la surface sera donc

$$1 + \alpha Y_0 - \frac{\frac{q}{2} . (\cos^2\theta - \frac{1}{3}) . \int \rho . a^2 da}{\int (1-a^2) . \rho . a^2 da}.$$

Ce rayon est celui d'un ellipsoïde de révolution : ainsi donc, dans ce cas général, comme dans celui de l'homogénéité, la surface libre du fluide, et par conséquent celle de chaque couche de niveau, ont la figure elliptique.

Si, pour abréger, l'on fait

$$\alpha h = \frac{\frac{q}{2} . \int \rho a^2 da}{\int (1-a^2) \rho a^2 da},$$

l'expression du rayon de chaque couche sera de cette forme :

$$a[1 + \alpha Y_0 - \alpha h (\cos^2\theta - \tfrac{1}{3})].$$

Y_0 étant arbitraires, si l'on fait $Y_0 = -\frac{1}{3}h$, l'expression précédente devient $a(1 - \alpha h\cos^2\theta)$ et αh représente alors l'ellipticité de la couche. A la surface du sphéroïde, on a $a = 1$, et le rayon devient $1 - \alpha h\cos^2\theta$. La diminution des rayons, en allant de l'équateur au pôle, est donc encore proportionnelle à $\cos^2\theta$, et par conséquent au carré du sinus de la latitude.

Le rayon osculateur du méridien dont le rayon est de la forme $1 - \alpha h\cos^2\theta$, a pour expression

$$1 - 2\alpha h\left(1 - \tfrac{3}{2}\cos^2\theta\right).$$

Désignons par c la longueur d'un degré mesuré sur le cercle dont le rayon est $1 - 2\alpha h$, l'expression du degré du méridien du sphéroïde sera

$$c + 3\alpha hc\cos^2\theta.$$

c représente donc la grandeur du degré sous l'équateur, et les degrés du méridien croissent de l'équateur au pôle, proportionnellement au carré du sinus de la latitude, tandis que les rayons menés du centre à la surface du sphéroïde diminuent suivant la même loi.

Si l'on applique à la Terre les résultats précédens et qu'on la considère simplement comme un sphéroïde composé de couches elliptiques de densité et d'ellipticité variables, en substituant pour Y_2 sa valeur dans l'équation (g), et en observant que l'intégrale $\int\rho.dh$ est nulle à la surface, on aura

$$6.\int\rho d.a^5h + 5\left(\frac{q}{\alpha} - 2h\right).\int\rho d.a^3 = 0. \quad (k)$$

Cette équation détermine la relation qui doit exister pour l'équilibre entre la densité ρ et l'ellipticité αh de chaque couche du sphéroïde. Elle donnera, en l'intégrant, la valeur de cette ellipticité, lorsque la loi des densités sera connue.

Les densités étant supposées aller en diminuant du centre à la surface, il résulte de cette équation que l'ellipticité de la Terre est moindre que dans le cas de l'homogénéité, à moins qu'on ne suppose que les ellipticités croissent de la surface au centre dans un plus grand rapport que la raison inverse du carré des distances à ce centre. En effet, soit $h = \frac{u}{a^2}$ on aura

$$\int \rho . d . a^5 h = \int \rho . d . a^3 u = u \int \rho . d . a^3 + \int du . \int a^3 . d\rho .$$

Si les accroissemens des ellipticités sont entre eux dans un rapport moindre que $\frac{1}{a^2}$, u augmentera du centre à la surface; du sera par conséquent une quantité positive, et comme $d\rho$ est négatif, puisqu'on suppose que les densités diminuent du centre à la surface, $\int du \int a^3 . d\rho$ sera aussi une quantité négative, et en faisant à la surface

$$\int \rho . d . a^5 h = (h - f) \int \rho . d . a^3 ,$$

f sera une quantité positive. L'équation (k), en y substituant cette valeur, devient

$$6(h - f) \int \rho . d . a^3 + 5\left(\frac{q}{\alpha} - 2h\right) \int \rho . d . a^3 = 0 ,$$

d'où l'on tire

$$h = \frac{5\frac{q}{\alpha} - 6f}{4}.$$

L'ellipticité αh du sphéroïde sera donc moindre que $\frac{5q}{4}$; elle sera plus petite par conséquent que dans le cas de l'homogénéité, où $d\rho$ étant nul, f est égal à zéro.

On peut conclure de là que l'aplatissement de la Terre, dans l'hypothèse la plus vraisemblable qu'on puisse faire sur sa constitution intérieure, est plus grand que $\frac{q}{2}$, valeur qui répond au cas où toute sa masse serait réunie à son centre, et moindre que $\frac{5q}{4}$, valeur qui répond au cas où cette masse serait homogène. En effet, il est naturel de croire que la densité des couches du sphéroïde terrestre augmente en approchant du centre, et cette supposition est même indispensable à l'égard de tous les corps célestes s'ils ont été originairement fluides; il est probable aussi que les ellipticités diminuent dans un rapport moindre que $\frac{1}{a^2}$, puisque cette hypothèse donnerait une ellipticité infinie aux couches infiniment voisines du centre, ce qui est absurde.

35. Considérons les variations de la pesanteur à la surface du sphéroïde que nous supposons composé de couches elliptiques d'une densité variable du centre à la surface.

La direction de la pesanteur de la surface au centre

n'est plus alors une ligne droite, elle forme une courbe dont chaque élément est perpendiculaire à la couche de niveau qu'il traverse. L'équation (f), en remarquant que par ce qui précède, on a $Y_1=0$, $Y_3=0$ etc., donne à la surface où les couches intérieures et extérieures se confondent,

$$\int\frac{dp}{\rho}=\frac{4\pi}{3r}.\int\rho.d.a^3+\frac{4\alpha\pi}{r}.\int\rho.d.\left[a^3.Y_0+\frac{a^5}{5r^2}.Y_2\right]$$
$$+\tfrac{1}{3}gr^2-\tfrac{1}{2}gr^2.(\cos^2\theta-\tfrac{1}{3}).$$

On aura l'expression de la pesanteur à la surface du sphéroïde, d'après ce qui a été dit n° 33, en changeant le signe de la différentielle du second membre de cette équation prise par rapport à r et divisée par dr. En nommant donc p cette force, on aura

$$p=\frac{4\pi}{3r^2}.\int\rho.d.a^3+\frac{4\alpha\pi}{r^2}.\int\rho.d.\left(a^3.Y_0+\frac{3a^5}{5r^2}.Y_2\right)$$
$$-\tfrac{2}{3}.gr+gr.(\cos^2\theta-\tfrac{1}{3}),$$

ou bien en observant qu'à la surface on a

$$r=1+\alpha Y_0+\alpha Y_2,$$

et que nous négligeons les quantités de l'ordre α^2 et αg,

$$p=\frac{4\pi}{3}.\int\rho.d.a^3-\frac{8\alpha\pi}{3}.(Y_0+Y_2).\int\rho.d.a^3$$
$$+4\alpha\pi.\int\rho.d.\left(a^3.Y_0+\frac{3a^5}{5}.Y_2\right)-\tfrac{2}{3}.g+g(\cos^2\theta-\tfrac{1}{3}).$$

On peut faire disparaître les intégrales de cette expression, en observant que l'équation (h) donne à la surface

$$\frac{4a\pi}{5}.\int\rho.d.a^5 Y_2 = \frac{4a\pi}{3}.Y_2.\int\rho.d.a^3 + \tfrac{1}{2}.g(\cos^2\theta - \tfrac{1}{3}).$$

En faisant, pour abréger,

$$P = \frac{4\pi}{3}.\int\rho.d.a^3 - \frac{8a\pi}{3}Y_0.\int\rho.d.a^3 + 4a\pi\int\rho.d.a^2 Y_0 - \tfrac{2}{3}g,$$

et observant que $g = \frac{4\pi}{3}.q\int\rho.d.a^3$, on aura

$$p = P + P.(\tfrac{5}{2}q - ah).(\cos^2\theta - \tfrac{1}{3}),$$

ou bien en faisant

$$P' = P - \tfrac{1}{3}P.(\tfrac{5}{2}q - ah)$$

et négligeant les quantités de l'ordre a^2,

$$p = P'.[1 + (\tfrac{5}{2}q - ah).\cos^2\theta].$$

Si l'on suppose $\theta = 90°$, on a $p = P'$; il suit donc de cette équation que P' est l'expression de la pesanteur à l'équateur, et que la pesanteur croît de l'équateur au pôle proportionnellement au carré du sinus de la latitude.

Si l'on nomme l et L' les longueurs du pendule correspondantes à p et P', on aura

$$l = L'.[1 + (\tfrac{5}{2}q - ah).\cos^2\theta].$$

L' est donc la longueur du pendule à l'équateur, et ses accroissemens de l'équateur au pôle sont encore proportionnels au carré du sinus de la latitude.

Si l'on désigne par $a\varepsilon$ l'excès de la longueur du pendule au pôle sur sa longueur à l'équateur divisé par cette dernière longueur, l'équation précédente

donnera $\alpha\epsilon + \alpha h = \frac{5}{2} q$, équation qui fait connaître une relation importante entre les longueurs du pendule qui bat les secondes à la surface du sphéroïde et son ellipticité. Dans le cas de l'homogénéité, on a $\alpha h = \frac{5}{4} q$, et par conséquent, $\alpha\epsilon = \alpha h$, comme nous l'avons vu n° 33; mais, *si le sphéroïde est hétérogène, l'excès de la longueur du pendule au pôle sur sa longueur à l'équateur divisé par cette dernière longueur, et l'excès de l'axe de l'équateur sur l'axe du pôle divisé par ce dernier axe, forment deux fractions dont la somme est constante et égale au double de l'aplatissement que le sphéroïde aurait dû prendre dans le cas de l'homogénéité.*

36. Les formules précédentes donnent le moyen d'exprimer, d'une manière très simple pour les sphéroïdes dont la surface est supposée fluide et en équilibre, la fonction d'où dépendent les attractions du sphéroïde sur un point extérieur. En effet, les formules (h) et (m) donnent

$$\int \rho . d . a^5 Y_2 = 5 Y_2 . \int \rho . a^2 da + \frac{5}{8} \frac{g}{\alpha\pi} (\cos^2 \theta - \tfrac{1}{3})$$
$$\int \rho . d . a^{i+3} Y_i = (2i + 1) Y_i \int \rho . a^2 da,$$

i étant un nombre quelconque différent de 2.

Si l'on substitue ces valeurs dans celle de V relative aux points extérieurs n° 23, qu'on place l'origine des coordonnées au centre de gravité du sphéroïde, ce qui donne $Y_1 = 0$, et qu'on suppose $Y_0 = 0$, on aura

$$V = \frac{4\pi}{r} \cdot \left[1 + \alpha . \left(\frac{Y_2}{r^2} + \frac{Y_3}{r^3} + \text{etc.} \right) \right] . \int \rho . a^2 da + \tfrac{1}{2} . \frac{g}{r^3} . (\cos^2 \theta - \tfrac{1}{3}).$$

Dans cette expression, $4\pi \int \rho a^2 da$, l'intégrale étant

prise depuis $a=0$ jusqu'à $a=1$, représente la masse de la sphère dont le rayon est 1 et que l'équation $Y_0=0$ suppose égale en solidité au sphéroïde; $4\pi\int\rho a^2 da$ est donc égal à la masse du sphéroïde.

La valeur précédente de V convient à toute espèce de sphéroïdes. Si l'on considère le cas particulier où le sphéroïde est composé de couches semblables dont la densité varie suivant une loi quelconque du centre à la surface, on aura

$$Y_2=-h(\cos^2\theta-\tfrac{1}{3}),\quad Y_3=0,\quad Y_4=0,\ \text{etc.}$$

On a d'ailleurs $g=4\pi q\int\rho a^2 da$; par conséquent,

$$V=\frac{M}{r}+\frac{M}{r^3}.(q-\alpha h).(\cos^2\theta-\tfrac{1}{3}).$$

Cette expression s'applique naturellement aux planètes, et en particulier à la Terre, dont la surface est recouverte en très grande partie d'un fluide en équilibre.

37. Nous terminerons ce chapitre en exposant quelques propriétés générales relatives à la figure des corps célestes, qui dérivent très simplement de l'expression des rayons de leurs surfaces, et qu'il est d'autant plus utile de connaître, qu'elles sont indépendantes de toute hypothèse sur leur constitution intérieure. Nous considérerons ici le cas le plus général, celui où le sphéroïde, toujours fluide à sa surface, peut recouvrir un noyau solide peut différent de la sphère.

La première de ces propriétés dépend de la nature du centre de gravité; elle consiste en ce que la masse

fluide en équilibre doit toujours se disposer de manière que la fonction Y_1 disparaisse de l'expression du rayon mené du centre du sphéroïde à la surface, en sorte que le centre de gravité de cette surface coïncide avec celui du sphéroïde.

En effet, soient dM une des molécules du sphéroïde, et x, y, z, ses trois coordonnées rectangulaires; on aura, en plaçant l'origine des coordonnées au centre de gravité,

$$\int x dM = 0, \quad \int y dM = 0, \quad \int z dM = 0.$$

Nommons R le rayon mené du centre de gravité du sphéroïde à l'élément dM, θ l'angle que forme ce rayon avec l'axe des x qui est aussi l'axe de rotation, et ω l'angle compris entre sa projection sur le plan des y, z et l'axe des y. On aura

$$x = R\cos\theta, \quad y = R\sin\theta\cos\omega, \quad z = R\sin\theta\sin\omega$$
$$dM = \rho R^2 dR d\theta d\omega \sin\theta.$$

Les trois équations qui résultent des propriétés du centre de gravité deviendront donc

$$\left.\begin{aligned} &\int \rho R^3 dR d\theta d\omega \sin\theta = 0, \\ &\int \rho R^3 dR d\theta d\omega \sin^2\theta \sin\omega = 0, \\ &\int \rho R^3 dR d\theta d\omega \sin^2\theta \cos\omega = 0. \end{aligned}\right\} \quad (l)$$

Supposons l'intégrale $\int \rho R^3 dR$ prise relativement à R, depuis $R = 0$ jusqu'à la surface, et développée dans une suite de la forme

$$N_0 + N_1 + N_2 + \text{etc.},$$

dont chaque terme soit assujetti à l'équation aux dif-

férences partielles,

$$\frac{d.\sin\theta\,\frac{dN_i}{d\theta}}{\sin\theta d\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}.\frac{d^2N_i}{d\omega^2}+i(i+1)N_i=0.$$

On aura généralement, par le théorème du n° 18, i étant différent de l'unité,

$$\int N_i \sin\theta\cos\theta d\theta d\omega=0,\quad \int N_i \sin^2\theta\sin\omega d\theta d\omega=0,$$
$$\int N_i \sin^2\theta\cos\omega d\theta d\omega=0.$$

Les trois équations (l) deviendront donc simplement, en vertu des précédentes,

$$\int N_1 \sin\theta\cos\theta d\theta d\omega=0,\quad \int N_1 \sin^2\theta\sin\omega\, d\theta d\omega=0,$$
$$\int N_1 \sin^2\theta\cos\omega\, d\theta d\omega=0.$$

La valeur de N_1 est de la forme

$$N_1=H\cos\theta+H'\sin\theta\sin\omega+H''\sin\theta\cos\omega.$$

Si l'on substitue cette valeur dans les équations données par la propriété du centre de gravité, on verra, que pour y satisfaire, il faut supposer

$$H=0,\quad H'=0,\quad H''=0,$$

et par conséquent $N_1=0$. Or, cette condition est la seule nécessaire pour que l'origine des rayons R de la surface soit au centre de gravité du sphéroïde.

En effet, supposons le sphéroïde un solide peu différent de la sphère, recouvert d'un fluide en équilibre; on aura, dans ce cas, $R=a(1+\alpha y)$ et par

conséquent

$$\int \rho R^3 dR = \tfrac{1}{4}\,\rho.d.[a^4(1+4\alpha y)],$$

la différentielle et l'intégrale indiquées étant relatives à la variable a dont ρ est fonction. On aura donc dans ce cas, en mettant pour y sa valeur $Y_0 + Y_1 +$ etc.,

$$N_1 = \alpha \int \rho.d.a^4 Y_1.$$

L'équation (m) du n° 34 donne à la surface, en observant qu'alors $a = 1$,

$$\int \rho.d.a^4 Y_1 = Y_1 \int \rho.d.a^3,$$

la valeur de Y_1 se rapportant à la surface. On aura donc

$$N_1 = \alpha Y_1 \int \rho.d.a^3;$$

et puisque $N_1 = 0$, quand on suppose l'origine des rayons R au centre de gravité, on aura, dans ce cas, $Y_1 = 0$. Ainsi donc la fonction Y_1 disparaîtra d'elle-même de l'expression du rayon de la surface du sphéroïde, toutes les fois qu'on prendra le centre de gravité pour origine des coordonnées, mais il n'en résultera aucune condition particulière pour les fonctions Y_2, Y_3, etc.

Nous avons vu, dans le chapitre V, liv. 1er, que pour la stabilité du mouvement de rotation d'un corps, il faut que l'axe autour duquel il tourne coïncide toujours, à très peu près, avec l'un de ses axes principaux. Si cette condition n'était pas remplie à l'égard des corps célestes, il en résulterait dans la position de

leurs axes de rotation des variations sensibles, surtout pour la Terre; et comme les observations les plus précises n'en font apercevoir aucune, il en faut conclure que les molécules de ces corps, à l'époque de leur formation, se sont disposées de manière à rendre stables leurs axes de rotation. Il en résulte une nouvelle propriété relative à leur figure, et qui consiste en une forme particulière que doit prendre dans ce cas la fonction Y_2 qui entre dans l'expression du rayon mené de l'origine des coordonnées à la surface du sphéroïde.

Pour le faire voir, désignons par x, y, z les trois coordonnées rectangulaires de l'élément dM rapportées aux trois axes principaux qui se croisent au centre de gravité du sphéroïde; on aura, par la nature de ces axes,

$$\int xydM = 0, \quad \int xzdM = 0, \quad \int yzdM = 0.$$

Si l'on substitue pour x, y, z et dM leurs valeurs précédentes, ces équations deviennent

$$\int \rho R^4 dR d\theta d\omega . \sin^2\theta \cos\theta \cos\omega = 0,$$
$$\int \rho R^4 dR d\theta d\omega . \sin^2\theta \cos\theta \sin\omega = 0,$$
$$\int \rho R^4 dR d\theta d\omega . \sin^3\theta \sin 2\omega = 0.$$

Supposons l'intégrale $\int \rho R^4 dR$ prise par rapport à R, depuis l'origine des coordonnées jusqu'à la surface, et développée en suite de la forme

$$U_0 + U_1 + U_2 + \text{etc.};$$

la fonction U_i étant, quel que soit i, assujettie à

l'équation aux différences partielles

$$\frac{d.\sin\theta\frac{dU_i}{d\theta}}{\sin\theta d\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\cdot\frac{d^2U_i}{d\omega^2} + i(i+1)U_i = 0.$$

En observant que les fonctions $\sin\theta\cos\theta\cos\omega$, $\sin\theta\cos\theta\sin\omega$ et $\sin^2\theta\sin 2\omega$ sont comprises dans la forme générale U_2, on aura, par le théorème du n° 18, i étant différent de 2,

$$\int U_i d\theta d\omega \sin\theta\cos\theta\cos\omega = 0,$$
$$\int U_i d\theta d\omega \sin\theta\cos\theta\sin\omega = 0,$$
$$\int U_i d\theta d\omega \sin^2\theta \sin 2\omega = 0,$$

et les trois équations données par les propriétés des axes principaux deviendront ainsi

$$\int U_2 d\theta d\omega \sin\theta\cos\theta\cos\omega = 0,$$
$$\int U_2 d\theta d\omega \sin\theta\cos\theta\sin\omega = 0,$$
$$\int U_2 d\theta d\omega \sin^2\theta\sin 2\omega = 0.$$

La fonction U_2 est de la forme

$$K(\cos^2\theta - \tfrac{1}{3}) + K'\sin\theta\cos\theta\sin\omega + K''\sin\theta\cos\theta\cos\omega$$
$$+ K'''\sin^2\theta\sin 2\omega + K^{\text{iv}}\sin^2\theta\cos 2\omega.$$

Si l'on substitue cette valeur dans les équations précédentes, elles donneront

$$K' = 0, \quad K'' = 0, \quad K''' = 0.$$

Ce sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que les trois axes des x, des y et des z soient des axes principaux de rotation, et il en résulte que U_2

est de la forme

$$K(\cos^2\theta - \tfrac{1}{3}) + K^{\text{IV}} \sin^2\theta \cos 2\varpi.$$

Voyons ce que devient la valeur de U_2 relativement à un sphéroïde très peu différent de la sphère et recouvert d'un fluide en équilibre. On a, dans ce cas, $R = a(1 + \alpha y)$, et par conséquent,

$$\int \rho R^4 dR = \tfrac{1}{5} \int \rho d.a^5(1 + 5\alpha y);$$

en substituant donc pour y sa valeur

$$Y_0 + Y_1 + Y_2 + \text{etc.},$$

on aura

$$U_2 = \alpha.\int \rho d.a^5 Y_2.$$

On a, par l'équation (h), n° 34, à la surface du sphéroïde, en supposant que la seule force étrangère qui agit sur lui est la force centrifuge due à son mouvement de rotation,

$$\frac{4\alpha\pi}{5} \int \rho d.a^5 Y_2 = \tfrac{4}{3} \alpha\pi Y_2.\int \rho.d.a^3 + \frac{g}{2}.(\cos^2\theta - \tfrac{1}{3}).$$

On aura donc

$$U_2 = \frac{5\alpha}{3}.Y_2.\int \rho\, d.a^3 + \frac{5g}{8\pi}.(\cos^2\theta - \tfrac{1}{3}).$$

L'expression générale de Y_2 est de la forme

$$k(\cos^2\theta - \tfrac{1}{3}) + k' \sin\theta \cos\theta \sin\varpi + k'' \sin\theta \cos\theta \cos\varpi$$
$$+ k''' \sin^2\theta \sin 2\varpi + k^{\text{IV}} \sin^2\theta \cos 2\varpi.$$

Si l'on substitue cette valeur dans l'expression pré-

cédente, qu'on remplace de même U_2 par sa valeur $K(\cos^2\theta - \frac{1}{3}) + K^{iv}\sin^2\theta\cos 2\omega$, en comparant les fonctions semblables dans les deux membres, on aura

$$k' = 0, \quad k'' = 0, \quad k''' = 0,$$

et l'expression de Y_2 sera de la forme

$$k(\cos^2\theta - \tfrac{1}{3}) + k^{iv}\sin^2\theta\cos 2\omega.$$

Il suit donc de la supposition que le sphéroïde tourne autour d'un de ses trois axes principaux, que les trois constantes k', k'', k''' qui entrent dans la valeur de Y_2 sont nécessairement nulles; mais il n'en résulte aucune condition relative aux constantes k et k^{iv}, qui restent indéterminées ainsi que les fonctions Y_3, Y_4, etc.

CHAPITRE VI.

Comparaison de la théorie précédente aux observations.

38. Considérons d'abord le sphéroïde terrestre, et comparons, relativement à la Terre, la figure qui résulte de la théorie précédente avec celle que l'on a conclue des observations. Quatre méthodes distinctes ont été appliquées à cette détermination. La première, toute directe et pour ainsi dire mécanique, consiste à mesurer des arcs de méridiens et de parallèles sur divers points du globe et à déterminer, en réunissant ces portions de la surface terrestre, la figure la plus probable du sphéroïde auquel elles appartiennent. Toutes les investigations de ce genre qui ont été tentées jusqu'ici conduisent à un résultat incontestable, c'est que la Terre a la forme d'un sphéroïde aplati vers les pôles et renflé à son équateur, comme l'exigent les lois de l'Hydrostatique Les mêmes observations montrent, il est vrai, qu'en quelques-unes de ses parties la Terre s'éloigne sensiblement de la figure d'un ellipsoïde de révolution ; mais lorsque l'on compare entre elles les valeurs

moyennes des degrés mesurés à des latitudes très distantes, l'influence des irrégularités de sa surface sur les résultats des opérations géodésiques est beaucoup atténuée, et l'on trouve alors qu'elle diffère peu d'un sphéroïde elliptique dont l'aplatissement serait de $\frac{1}{334}$.

Le second procédé qu'emploient les géomètres pour déterminer la figure de la Terre, résulte des variations qu'on observe dans l'intensité de la pesanteur aux différens points de sa surface, et qu'on calcule avec beaucoup de précision par le moyen du pendule. Si la Terre a la forme d'un ellipsoïde de révolution peu différent de la sphère, d'après la théorie développée dans le chapître précédent, les accroissemens de la longueur du pendule à secondes transporté en divers lieux du globe, doivent être proportionnels au sinus du carré des latitudes; il sera donc facile, en soumettant les expériences à cette loi, de reconnaître si la Terre s'écarte ou non de la figure elliptique, et de déterminer dans ce dernier cas son aplatissement. Les résultats de ces recherches ont montré que les inégalités du sphéroïde terrestre ont beaucoup moins d'influence sur les variations des longueurs du pendule que sur celles des degrés des méridiens, comme l'indique aussi la théorie, qui prouve que les termes qui écartent l'expression des degrés terrestres de la loi elliptique, sont affectés de coefficiens plus considérables que les termes correspondans dans l'expression des longueurs du pendule. Il s'ensuit que cette seconde méthode est beaucoup plus propre que la première à fournir sur

la figure de la Terre des notions exactes, et l'aplatissement qu'elle donne s'accorde d'une façon remarquable avec celui qui résulte de l'observation des mouvemens de la Lune.

Cette troisième manière de déterminer la forme de notre globe, moins directe que les deux premières, est peut-être un des résultats les plus surprenans qu'ait produits l'application de l'Analyse à la grande loi de l'attraction universelle, et mérite d'obtenir une place importante dans l'histoire des progrès de l'esprit humain. Elle consiste à reconnaître, parmi les nombreuses inégalités du mouvement de la Lune, celles qui dépendent de la non sphéricité de la Terre, et, en comparant leurs valeurs données par l'observation à celles qui résultent de la théorie dans la supposition que la Terre est un sphéroïde elliptique qui exerce sur la Lune une action modifiée par sa figure, à déterminer la valeur exacte de son aplatissement. Laplace, qui le premier conçut cette idée ingénieuse, a trouvé, d'après les observations de Burg, que l'excentricité de la Terre résultant de ces phénomènes était de $\frac{1}{304}$; et peut-être est-ce la donnée la plus exacte que nous ayons sur cet aplatissement, à cause des difficultés des autres observations qui le déterminent, et de l'influence qu'ont sur elles les causes particulières qui écartent trop souvent la Terre de la figure elliptique.

Enfin, les phénomènes de la nutation et de la précession des équinoxes fournissent encore des renseignemens précieux sur la figure et sur la constitution du sphéroïde terrestre. Ils ne donnent pas, il

est vrai, la valeur absolue de son aplatissement, mais ils font connaître deux limites entre lesquelles cette fraction est comprise, et ces limites sont $\frac{1}{179}$ et $\frac{1}{578}$.

39. Déterminons d'abord la figure de la Terre qui résulte des mesures directes prises à sa surface. Si l'on imagine un plan passant par l'axe de la Terre et par le zénith d'un point donné de sa surface, ce plan tracera dans le ciel un grand cercle qui sera le méridien du lieu, et la courbe que ce plan intercepte sur la surface de la Terre se nomme *le méridien terrestre*, ou, par abréviation, *la méridienne*.

Lorsqu'en partant de l'équateur, on s'avance sur cette courbe en marchant vers le nord, on voit successivement la hauteur méridienne des étoiles situées au nord augmenter, tandis que celle des étoiles situées au midi éprouve une dépression proportionnée. Cette remarque très simple a sans doute donné aux hommes la première idée de la forme arrondie du globe. Si la Terre était sphérique, les degrés du méridien, mesurés à diverses latitudes, seraient tous égaux entre eux; mais l'observation a fait reconnaître des différences notables dans ces degrés, et elle a montré qu'ils allaient en croissant à mesure qu'on s'éloigne de l'équateur; d'où l'on a conclu que la Terre est un sphéroïde aplati vers les pôles. En effet, concevons pour fixer les idées que la Terre est un ellipsoïde de révolution : on peut supposer qu'un arc très petit du méridien se confond sensiblement avec le cercle osculateur déterminé par l'intersection des deux normales menées à ses extrémités, et l'arc de cercle compris entre ces normales sera d'autant

plus grand que son rayon sera plus considérable. Or, aux pôles ou à l'extrémité du petit axe, l'ellipse pendant un court intervalle forme, à très peu près, une ligne droite, les deux normales qui déterminent le rayon du cercle osculateur sont presque parallèles; ce rayon, et par conséquent le degré du méridien, sont alors plus grands que sur tout autre point. La courbure des arcs elliptiques augmentant ensuite de plus en plus, les rayons osculateurs vont en diminuant sans cesse du pôle à l'équateur; par conséquent les degrés doivent aller en croissant, à mesure qu'on avance de ce second point vers le premier.

Nous ne nous proposons pas d'exposer ici les procédés géodésiques qui servent à déterminer les arcs du méridien terrestre; on trouvera sur cet objet des détails circonstanciés dans l'ouvrage de Delambre, où cet astronome décrit les opérations qu'il a lui-même exécutées avec Méchain, pour la détermination de l'arc du méridien compris entre Dunkerque et Barcelone. Nous donnerons simplement les résultats des travaux qui ont été entrepris à diverses époques pour la mesure des degrés de la méridienne, et nous indiquerons la méthode que l'on doit suivre pour en conclure quelle est la figure la plus probable que ces mesures assignent à la Terre. On conçoit en effet que, comme il est impossible de déterminer dans toute son étendue le méridien terrestre, il faudra commencer par faire une hypothèse quelconque sur la nature de cette courbe et sur la figure générale du globe. On déterminera ensuite les arbitraires de ces suppositions au moyen des données fournies par les opérations

géodésiques, et l'on examinera enfin si la figure qui en résulte pour le sphéroïde terrestre peut concorder avec celle que l'on conclut des autres phénomènes observés.

Supposons, en premier lieu, le sphéroïde elliptique et de révolution. C'est l'hypothèse la plus simple que l'on puisse faire sur la figure de la Terre, puisqu'on sait d'avance que l'hypothèse d'une figure sphérique ne saurait lui convenir; d'ailleurs, c'est celle qui résulte directement des lois de l'Hydrostatique, si l'on suppose que la Terre était originairement fluide et homogène, et qu'elle a conservé, en se durcissant, sa figure primitive. Proposons-nous donc de déterminer, parmi toutes les figures elliptiques qu'on peut donner au méridien terrestre, celle qui s'accorde le mieux avec les degrés mesurés.

Soient c_1, c_2, c_3, etc., les longueurs de ces degrés, L_1, L_2, L_3, etc., les latitudes correspondantes au milieu de chacun d'eux. Puisque nous supposons que la Terre est un ellipsoïde de révolution qui s'écarte peu de la figure de la sphère, la variation des degrés à sa surface sera proportionnelle au carré du sinus de la latitude; on aura donc généralement

$$c = a + b \cdot \sin^2 L, \qquad (a)$$

a et b étant deux constantes dont la première représente la grandeur du degré à l'équateur et l'autre dépend de l'aplatissement du sphéroïde terrestre.

En substituant respectivement c_1, c_2, c_3, etc., L_1, L_2, L_3, etc., à la place de c et L dans l'équation

précédente, on aura autant d'équations qu'il y a eu de degrés mesurés. Si la Terre était rigoureusement elliptique, et si les observations étaient parfaitement exactes, toutes ces équations, de quelque manière qu'on les combinât entre elles, donneraient à très peu près pour a et b les mêmes valeurs; mais cela n'a pas lieu généralement, et les degrés mesurés à diverses latitudes ont donné pour la figure des méridiens des ellipses très différentes. Il s'agit donc de combiner le système des équations précédentes, de manière à en tirer les valeurs des inconnues a et b qui, substituées dans la formule (a), représentent, avec le plus de précision possible, les mesures observées. Voici, pour y parvenir, une méthode très simple et qui peut être utile dans une infinité de cas semblables, par exemple, lorsqu'étant donné un nombre quelconque d'observations d'une comète, il s'agit de déterminer parmi toutes les courbes paraboliques qui peuvent représenter sa marche, celle qui satisfait plus exactement que toutes les autres à leur ensemble.

Comme il est impossible, quelque valeur qu'on suppose aux constantes a et b, de satisfaire à la fois à toutes les équations qu'on peut former par la substitution des quantités c_1, c_2, etc., L_1, L_2, etc., à la place de c et L dans l'équation (a), on suppose que les différences des résultats sont dues aux erreurs dont les observations sont susceptibles. La question revient alors à trouver le système de ces erreurs, qu'on peut distribuer arbitrairement sur l'ensemble des observations, dans lequel la plus grande erreur est moindre,

abstraction faite du signe, que dans tout autre système, et à déterminer a et b par cette condition. C'est à quoi on parvient très facilement par *la méthode des moindres carrés*, imaginée par M. Legendre, et que Laplace a en effet reconnue comme la plus exacte et la plus simple que l'on puisse employer dans toutes les questions de ce genre. Ce procédé consiste à rendre la somme des carrés des erreurs un *minimum* par rapport à chacune des inconnues du problème. On forme, en exprimant analytiquement cette condition, autant d'équations qu'il y a d'inconnues à déterminer, et il ne reste plus pour les obtenir qu'à résoudre ces équations par les méthodes ordinaires.

Soient donc e_1, e_2, e_3, etc., les erreurs des degrés mesurés c_1, c_2; etc., en substituant $c_1 + e_1$, $c_2 + e_2$, etc., à la place de c_1, c_2, etc., dans la formule (a), on formera les équations suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} c_1 - a - b.\sin^2 L_1 = e_1, \\ c_2 - a - b.\sin^2 L_2 = e_2, \\ c_3 - a - b.\sin^2 L_3 = e_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_n - a - b.\sin^2 L_n = e_n, \end{array}\right\} \quad (b)$$

n étant le nombre des degrés mesurés.

Il faut exprimer maintenant que la somme des carrés des erreurs $e_1^2 + e_2^2 +$ etc. est un *minimum* par rapport à chaque inconnue a et b, ce qui revient évidemment à multiplier tous les termes de chacune des équations précédentes par le coefficient de cette

inconnue, prise avec son signe, et à égaler à zéro la somme de ces produits. Ainsi, tous les coefficiens de a étant l'unité dans les équations précédentes, pour obtenir l'équation du *minimum* par rapport à a, il suffira de les ajouter entre elles; pour former la même équation relative à b, on multipliera la première par $\sin^2 L_1$, la seconde par $\sin^2 L_2$, la troisième par $\sin^2 L_3$, etc. On ajoutera ensuite entre elles les équations résultantes, et en égalant à zéro les deux sommes précédentes, on aura les équations cherchées. On trouvera, de cette manière, les deux équations suivantes :

$$\left.\begin{aligned} an + b.\Sigma.\sin^2 L_1 - \Sigma.c_1 &= 0, \\ a.\Sigma.\sin^2 L_1 + b.\Sigma.\sin^4 L_1 - \Sigma.c_1 \sin^2 L_1 &= 0, \end{aligned}\right\} (c)$$

la caractéristique Σ désignant généralement la somme de toutes les quantités semblables qu'on peut former en considérant l'ensemble des observations données.

Les deux équations (c) suffiront pour déterminer a et b, et en substituant ensuite leurs valeurs dans les équations (b), on aura les erreurs e_1, e_2, e_3, etc., qui conviennent au système où les erreurs extrêmes sont renfermées dans les plus étroites limites possibles, et l'on verra si ces erreurs sont telles, qu'on les puisse attribuer aux incorrections de l'observation. Mais si parmi elles il s'en trouvait quelqu'une trop considérable pour qu'il soit possible de l'admettre, on rejetterait les degrés mesurés qui ont donné cette erreur comme provenant d'opérations défectueuses, et l'on déterminerait les constantes a

et b au moyen des équations restantes, qui donneraient alors des résultats beaucoup plus d'accord avec les observations.

Comme les considérations qui précèdent sont fondées sur la supposition que les degrés croissent proportionnellement au carré de la latitude, et que la même loi, dans l'hypothèse de la figure elliptique de la Terre, convient également à la variation de la longueur du pendule, il est clair que la méthode que nous venons d'exposer peut s'appliquer identiquement aux mesures du pendule à secondes observées à diverses latitudes, et donne le moyen d'en déduire avec le plus grand degré de probabilité possible l'aplatissement de la Terre.

40. La méthode précédente est la plus simple que l'on puisse employer pour reconnaître si la figure du sphéroïde terrestre, conclue des mesures géodésiques prises à sa surface et de l'observation du pendule, s'accorde avec celle qui résulte des autres phénomènes; mais elle suppose que les degrés du méridien que l'on compare entre eux ont été conclus d'arcs différens, mesurés dans des régions éloignées du globe. S'il s'agissait simplement de déduire de l'un de ces arcs, mesuré avec beaucoup de soin, comme l'a été l'arc compris entre Dunkerque et Barcelone, l'aplatissement de la Terre, voici la méthode que l'on suivrait dans ce cas.

Nous avons vu, n° 34, que si l'on suppose que la Terre, originairement fluide, a conservé en se refroidissant la figure qu'elle avait prise à l'état d'équilibre, le rayon de sa surface pouvait être ex-

primé par la formule suivante :

$$r = a(1 - \alpha h \cos^2 \theta),$$

a représentant le demi-axe de l'équateur, θ l'angle que forme le rayon r avec l'axe des pôles, et αh l'aplatissement de la Terre, que nous regardons comme une très petite quantité dont on peut négliger le carré et les puissances supérieures.

Nommons s l'arc du méridien terrestre compris entre les deux rayons vecteurs a et r; on aura généralement $ds = -\sqrt{r^2 d\theta^2 + dr^2}$, l'arc s étant supposé croître de l'équateur aux pôles. La valeur précédente de r donne, en la différenciant,

$$dr = 2a\alpha h \sin\theta \cos\theta d\theta.$$

On aura donc, en négligeant les quantités de l'ordre α^2,

$$ds = -rd\theta = -ad\theta.(1 - a\alpha h \cos^2 \theta),$$

d'où, en intégrant, on tire

$$s = \text{const.} - a\theta.(1 - \tfrac{1}{2}\alpha h) + \tfrac{1}{4}.a\alpha h \sin 2\theta.$$

Introduisons dans cette formule, au lieu de l'angle θ, la latitude L correspondante à l'extrémité de l'arc s. Quelle que soit la nature du méridien terrestre, il est aisé de voir qu'on aura

$$\text{tang}\,[\theta - (90^\circ - L)] = \frac{dr}{rd\theta},$$

d'où l'on tire, en observant que dr est du premier

ordre par rapport à α, et que nous négligeons le carré de cette quantité,

$$L = 90° - \theta - \frac{dr}{rd\theta},$$

ou bien en substituant pour r et $\frac{dr}{d\theta}$ leurs valeurs,

$$L = 90° - \theta + \alpha h \sin 2\theta;$$

on aura donc réciproquement

$$\theta = 90° - L + \alpha h \sin 2L.$$

Cette valeur substituée dans l'expression de s donnera, aux quantités près de l'ordre α^2,

$$s = a(1 - \tfrac{1}{2}\alpha h)\, L - \tfrac{3}{4}.a\alpha h \sin 2L.$$

Nous n'ajoutons point de constante au second membre, parce que nous supposons l'arc s compté de l'équateur, ce qui donne $s = 0$ en même temps que $L = 0$.

Désignons par S le quart du méridien terrestre; en faisant dans l'équation précédente

$$L = 90° = \tfrac{1}{2}\pi,$$

on aura

$$S = a(1 - \tfrac{1}{2}\alpha h).\tfrac{1}{2}\pi,$$

et par conséquent,

$$s = \frac{S}{\frac{1}{2}\pi}.(L - \tfrac{3}{4}\alpha h \sin 2L).$$

En désignant par L' la latitude correspondante à

l'extrémité d'un autre arc du méridien s', on aurait de même

$$s' = \frac{S}{\frac{1}{2}\pi}.(L' - \tfrac{3}{4}ah\sin 2L').$$

L'arc compris entre les deux parallèles correspondans aux latitudes L et L' sera donc

$$s' - s = \frac{S}{\frac{1}{2}\pi}.[L' - L - \tfrac{3}{4}ah(\sin 2L' - \sin 2L)].$$

Cette équation établit la relation qui doit exister entre la longueur d'un arc quelconque du méridien et les latitudes de ses points extrêmes. Soit s la longueur du degré moyen du méridien terrestre, ou la longueur du degré sous le parallèle de 45°, on aura $\frac{S}{\frac{1}{2}\pi} = s$, et l'équation précédente, en y substituant cette valeur, donnera immédiatement la longueur du degré, quand l'aplatissement ah du sphéroïde terrestre sera déterminé.

Maintenant, soient L_1, L_2, L_3, etc., les latitudes respectives des extrémités des arcs du méridien s_1, s_2, s_3, comptés de l'équateur; en substituant successivement ces quantités à la place de L et de s dans l'équation précédente, on formera un système d'équations semblables qui serviront à déterminer l'ellipse qu'indiquent avec le plus de vraisemblance, pour le méridien terrestre, les arcs mesurés. Pour cela, on appliquera à ces équations la méthode du n° 39; on désignera par c_1, c_2,

s_3, etc., les arcs mesurés du méridien, à partir du parallèle qui correspond à la latitude L_1, en sorte qu'on aura $c_1 = s_2 - s_1$, $c_2 = s_3 - s_2$, etc.; on nommera, comme précédemment, L_1, L_2, L_3, etc., les latitudes, et l'on désignera par e_1, e_2, e_3 les erreurs dont ces latitudes sont affectées, et qu'on peut attribuer, soit aux observations astronomiques d'où elles sont déduites, soit aux mesures géodésiques dont les inexactitudes influent sur les latitudes des parallèles qu'on suppose séparés par les intervalles c_1, c_2, etc. Les erreurs e_1, e_2, e_3, etc., étant de très petites quantités, on pourra d'ailleurs négliger les termes où elles se trouveraient multipliées par α; on aura ainsi les équations suivantes :

$$\left.\begin{array}{l}
L_2 - L_1 - \frac{3}{2}\alpha h \sin(L_2 - L_1).\cos(L_2 + L_1) - \frac{c_1}{s} = e_1 - e_2, \\
L_3 - L_1 - \frac{3}{2}\alpha h \sin(L_3 - L_1).\cos(L_3 + L_1) - \frac{c_2}{s} = e_1 - e_3, \\
L_4 - L_1 - \frac{3}{2}\alpha h \sin(L_4 - L_1).\cos(L_4 + L_1) - \frac{c_3}{s} = e_1 - e_4, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
L_n - L_1 - \frac{3}{2}\alpha h \sin(L_n - L_1).\cos(L_n + L_1) - \frac{c_n}{s} = e_1 - e_n.
\end{array}\right\} (d)$$

Dans ces équations, les latitudes L et L′ sont supposées exprimées en degrés; il faudra donc exprimer de même la quantité αh, ce qui revient à multiplier par $\frac{180}{\pi}$ les coefficiens dont elle est affectée.

Comme il est important de déterminer les erreurs e_1, e_2, etc., indépendamment l'une de l'autre, on

pourra considérer e_1 comme une nouvelle inconnue donnée par l'équation $e_1 - e_1 = 0$; en joignant cette équation à celles qui précèdent, on aura autant d'équations qu'il y a eu d'arcs mesurés c_1, c_2, etc. On déterminera ensuite, par la méthode des moindres carrés, l'hypothèse elliptique dans laquelle la plus grande erreur est un *minimum*, et l'on reconnaîtra si elle est comprise dans les limites de celles dont les observations sont susceptibles.

Les mêmes considérations conviennent, d'après ce que nous avons dit n° 39, aux observations de la longueur du pendule à secondes, mesurée à différentes latitudes.

41. Appliquons d'abord les méthodes précédentes aux principaux résultats qu'ont produits les grandes opérations entreprises en diverses contrées, pour obtenir la mesure exacte des degrés des méridiens terrestres. Parmi ces degrés, choisissons les cinq suivans, qui sont évalués en parties de la double toise qui a servi à mesurer l'arc compris entre Dunkerque et Barcelone et à laquelle on a donné le nom de *module*.

Observateurs.	Longueurs des degrés.	Latitudes correspond. au milieu de chaque degré.	Arc total mesuré d'où le degré a été conclu.
	mod.		
Bouguer (au Pérou)........................	28376,5	0° 0′ 0″	3° 7′ ″
La Caille (au cap de Bonne-Espérance)...	28518,5	33.18.30	1.13.17
Boscovich (Italie)........................	28489,5	43. 1. 0	2. 9. 5
Delambre et Méchain (France)........	28509,2	46.11.58	9.40.25
Clairaut, Maupertuis, etc. (Laponie)...	28702,5	66.20. 0	57.29

On voit, par ce tableau, que, quelle que soit la figure de la Terre, toutes les observations s'accordent à montrer que les degrés du méridien vont en augmentant de l'équateur aux pôles, ce qui indique, n° 39, une diminution correspondante dans les rayons du sphéroïde terrestre, et par conséquent un aplatissement dans le sens des pôles.

Au moyen de ces valeurs, les équations (b) du n° 39, deviennent

$$\left.\begin{array}{l} 28376^{\text{mod.}},5 - a - b.0,00000 = e_1 \\ 28518\;\;,5 - a - b.0,30156 = e_2 \\ 28489\;\;,5 - a - b.0,46541 = e_3 \\ 28509\;\;,2 - a - b.0,52093 = e_4 \\ 28702\;\;,5 - a - b.0,83887 = e_5, \end{array}\right\}(e)$$

et l'on en déduit pour les équations qui résultent de la condition que la somme des carrés des erreurs soit un *minimum*.

$$a + b.0,42535 - 28519^{\text{mod.}} = 0,$$
$$a + b.0,60308 - 28582^{\text{mod.}} = 0,$$

d'où l'on tire

$$a = 28368^{\text{mod.}}, \quad b = 354^{\text{mod.}},47.$$

On aura donc généralement pour l'expression du degré du méridien terrestre correspondant à la latitude L,

$$c = 28368^{\text{mod.}} + 354^{\text{mod.}},47 \sin^2 L.$$

Nous avons vu, n° 34, que l'accroissement des

degrés du méridien elliptique de l'équateur au pôle, est à très peu près égal à $3\alpha hc \sin^2 L$, αh étant l'excentricité de l'ellipse, et c le degré de l'équateur : la formule précédente donne donc, à très peu près, $\frac{1}{240}$ pour l'aplatissement du sphéroïde terrestre.

En adoptant pour la Terre la figure elliptique que ces résultats lui supposent, on trouve que la plus grande des erreurs qui ont dû être commises dans la mesure des degrés du méridien terrestre, et qui porte sur le degré du cap de Bonne-Espérance, mesuré par La Caille, est de $43^{\text{mod.}},6$. Cette erreur a paru d'abord trop considérable pour pouvoir être admise, et l'on a conclu que les degrés du méridien varient suivant une loi très différente du carré du sinus de la latitude, et que par conséquent le sphéroïde terrestre s'écarte sensiblement de la figure elliptique.

Cependant, comme l'ellipsoïde est, après la sphère, la figure la plus simple et la plus naturelle que l'on puisse adopter pour la Terre, et qu'elle est indiquée d'ailleurs par toutes les lois de l'Hydrostatique, on aurait dû, avant de la rejeter entièrement, attendre que le temps eût permis de vérifier les mesures des degrés qui semblaient s'en écarter davantage, d'autant que les opérations de ce genre, exigeant une extrême délicatesse, sont plus qu'aucune autre susceptibles d'inexactitudes. L'expérience a pleinement confirmé ces observations, et la mesure du degré de Laponie, exécutée de nouveau et avec beaucoup de soin par des astronomes suédois, pendant les années 1801, 1802 et 1803, a fait reconnaître qu'une er-

reur beaucoup plus grave que celle qu'indiquait l'analyse précédente s'était glissée dans la mesure du même degré, exécutée en 1736 par Clairaut, Maupertuis, Lemonnier, Camus, Outhier et Celsius.

La grandeur du degré sous le cercle polaire s'est trouvée, d'après ces nouvelles opérations, de $115^{\text{mod.}}$ plus petite que celle qu'on lui avait d'abord assignée, ce qui le réduit à $28587^{\text{mod.}},5$. Cette correction est d'autant plus précieuse, que la nouvelle mesure donne, pour l'aplatissement du sphéroïde terrestre, une valeur qui s'accorde beaucoup mieux avec l'aplatissement qui résulte des observations du pendule et des autres phénomènes, que celle que la première indiquait, et qui coïncide entièrement avec la valeur de cet aplatissement qu'on a déduit de la comparaison du nouveau degré mesuré en France à celui de l'équateur mesuré par Bouguer.

En effet, si l'on introduit la correction précédente dans les équations (e), on trouvera, pour les deux équations du *minimum*,

$$a + b.0{,}42535 - 28496 = 0,$$
$$a + b.0{,}60308 - 28541 = 0;$$

d'où l'on tire

$$a = 28388^{\text{mod.}}, \qquad b = 254^{\text{mod.}},36,$$

ce qui donne $\frac{1}{334{,}81}$ pour l'aplatissement de la Terre. On trouve, comme on le verra plus bas, en comparant les longueurs du pendule à différentes

latitudes, $\frac{1}{342}$ pour la valeur de cet aplatissement : la mesure des degrés et l'observation des variations de l'intensité de la pesanteur à la surface du globe, donnent ainsi à la Terre à très peu près la même figure elliptique.

42. Il est donc presque démontré qu'une inexactitude grave s'était introduite dans la mesure du degré de Laponie; et cela est d'autant plus vraisemblable, que cette erreur de 230 toises ne porte pas entièrement sur les mesures géodésiques, ce qui paraîtrait en effet inadmissible. Il suffit pour l'expliquer de supposer une erreur de quelques secondes dans les latitudes des points extrêmes de l'arc mesuré par les académiciens français, et la difficulté des observations qui servent à les déterminer rend cette supposition très plausible. Sans doute, des erreurs du même genre ont pu se glisser dans la détermination d'autres degrés mesurés du méridien terrestre. On doit donc être extrêmement circonspect sur les conclusions qu'on en tire; et c'est par cette raison que, parmi le grand nombre de ces mesures que nous possédons, nous avons choisi celles qui, par les soins qu'on a mis à leur exécution et par la réputation des observateurs, nous ont semblé devoir inspirer le plus de confiance. La méthode de combinaison appliquée aux équations (*e*) est aussi très propre à diminuer l'influence de ces erreurs sur les résultats; on doit observer en général que, comme les arbitraires qui entrent dans l'équation (*b*) ne sont qu'au nombre de deux, il suffira de deux degrés mesurés à la surface

de la Terre, pour faire connaître son aplatissement et la longueur absolue du degré sous l'équateur. Si la Terre était un sphéroïde exactement elliptique, on obtiendrait donc, à très peu près, les mêmes valeurs des constantes a et b, en comparant deux à deux tous les degrés mesurés jusqu'à présent; mais cette comparaison produit au contraire des différences qu'il est difficile d'attribuer aux seules erreurs des observations; on en doit conclure que la figure de la Terre est très irrégulière et beaucoup plus compliquée que nous ne l'avons supposé. On conçoit, en effet, qu'en admettant même que la figure de la Terre est celle qui résulte des lois de l'Hydrostatique, mille circonstances ont pu modifier ces lois de manière à l'écarter sensiblement de l'ellipsoïde. Les degrés mesurés à sa surface indiquent d'une manière manifeste ces écarts; ils donnent même lieu de penser que les deux hémisphères ne sont pas semblables de chaque côté de l'équateur. Ainsi la longueur du degré mesuré par La Caille au cap de Bonne-Espérance, surpasse celle des degrés mesurés à une égale latitude et même à des latitudes plus grandes dans l'hémisphère boréal de la Terre. Le moyen le plus propre de diminuer l'influence de ces différences, ainsi que celle des erreurs dont les observations sont susceptibles, est donc de combiner entre elles un grand nombre d'observations, comme nous l'avons fait nº 41, ou du moins de comparer des degrés mesurés à des latitudes assez distantes pour que les résultats soient indépendans des effets qui tiennent aux irrégularités de la Terre et à des circonstances pure-

ment locales. C'est ainsi qu'en comparant au degré du Pérou le degré de France qui a été conclu d'un arc plus grand qu'aucun de ceux qui avaient été mesurés jusqu'ici, et qui, par les soins et les lumières de ceux qui l'ont déterminé, présente peu de chances d'inexactitude, on a trouvé pour l'aplatissement de la Terre $\frac{1}{334}$, valeur qui s'accorde exactement avec celle que donne le nouveau degré de Laponie comparé aux autres degrés dont les mesures sont rapportées dans le tableau du n° 41. Ce résultat a servi à établir la base de notre système de mesures. Le quart du méridien terrestre conclu de l'arc mesuré entre Dunkerque et Montjoui est, d'après cet aplatissement, de $2565370^{\text{mod.}}$, et le mètre, qui en est la dix-millionième partie, est ainsi égal à $0^{\text{mod.}},2565370$ ou à $0^{\text{toise}},513074$, la toise étant celle qui a servi à la mesure du degré du Pérou. Ce simple avertissement suffirait pour qu'on pût retrouver en tout temps l'unité fondamentale de nos mesures, si son étalon venait à se perdre ou à s'altérer dans la suite, à moins cependant qu'il n'arrivât quelque grand changement dans la constitution physique du globe. C'est sans doute par cette raison qu'on a choisi la grandeur de la Terre pour la base de notre système métrique, de préférence aux autres élémens proposés pour cet objet. Ainsi, par exemple, la longueur du pendule qu'on vient récemment d'employer en Angleterre à l'établissement d'un nouveau système de mesures, n'offre point, à beaucoup près, le même caractère de fixité. En effet, l'intensité de la pesanteur, et par conséquant la longueur du pendule, est sujette, non-seu-

lement comme les arcs mesurés du méridien, à des variations qui dépendent de la figure de la Terre et des irrégularités de sa surface, elle en éprouve encore de particulières qui tiennent à la non homogénéité des différentes parties de cette surface, et enfin rien n'assure que l'intensité de la pesanteur est en elle-même inaltérable, et qu'elle ne subira pas dans la suite des siècles des modifications semblables à celles qu'éprouve continuellement le magnétisme à la surface du sphéroïde terrestre.

43. Choisissons maintenant, pour déterminer la figure elliptique de la Terre, des arcs de méridien mesurés à des latitudes peu différentes. Les résultats suivans, provenant des opérations exécutées avec un soin extrême par Delambre et Méchain, pour la mesure de l'arc du méridien compris entre Dunkerque et Montjoui, on peut compter sur leur exactitude.

Lieux de l'observation.	Latitudes.	Distances des quatre dernières stations au parallèle de Monjoui.
Monjoui	41°21′44″,80	
Carcassonne	43.12.54,40	52749^{mod},48
Évaux	46.10.42,50	137174 ,03
Paris (au Panthéon)	48.50.49,75	213319 ,77
Dunkerque	51. 2.10,50	275792 ,36

En substituant ces valeurs dans les équations (d) du n° 40, et en faisant $s = \frac{10000}{16}$ pour éviter d'opérer

sur de trop grands nombres, on formera les cinq équations suivantes :

$$\left.\begin{aligned}
e_1 - e_1 &= 0.0000000 . \beta + 0.000000 . ah - 0°00000, \\
e_2 - e_1 &= 5.274948 . \beta + 0.262581 . ah - 1.85266, \\
e_3 - e_1 &= 13.717403 . \beta + 0.309603 . ah - 4.81602, \\
e_4 - e_1 &= 21.3361977 . \beta - 0.040978 . ah - 7.48469, \\
e_5 - e_1 &= 27.579236 . \beta - 0.604414 . ah - 9.67379.
\end{aligned}\right\}$$

En ajoutant entre elles ces équations, après avoir fait passer l'erreur e_1 dans le second membre, et en égalant à zéro leur somme, on trouve

$$5e_1 = -67.903564 . \beta + 0.073208 . ah + 23.82717.$$

Si l'on substitue la valeur de e_1 qui résulte de cette équation dans celles qui la précèdent, conformément à ce qui a été dit n° 40, on formera les cinq nouvelles équations suivantes :

$$\begin{aligned}
e_1 &= -13.580713 . \beta + 0.014642 . ah + 4°76543, \\
e_2 &= -8.305765 . \beta + 0.277223 . ah + 2.91277, \\
e_3 &= 0.136690 . \beta + 0.324245 . ah - 0.05059, \\
e_4 &= 7.751264 . \beta - 0.026337 . ah - 2.71926, \\
e_5 &= 13.998523 . \beta - 0.589772 . ah - 4.90836,
\end{aligned}$$

d'où l'on tire, par la méthode des moindres carrés, pour déterminer les valeurs des arbitraires β et ah, les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned}
0 &= -178.705291 + \beta . 509,48074 - ah . 10,91717, \\
0 &= 3.827288 - \beta . 10,91717 + ah . 0,53073.
\end{aligned}$$

La résolution de ces équations donne

$$\text{Є} = 0.3509117, \quad ah = 0.0069227.$$

Nous avons supposé le 45ᵉ degré $s = \frac{10000}{\text{Є}}$; on aura donc ainsi

$$s = 28497{,}2, \quad ah = \frac{1}{144{,}45}.$$

Telle est donc la valeur du degré moyen et de l'aplatissement du méridien terrestre qu'on déduirait de la seule considération des degrés mesurés en France. La figure elliptique qui en résulte pour la Terre diffère beaucoup de celle qu'on détermine par la comparaison des mêmes degrés au degré mesuré à l'équateur, par les observations du pendule et par d'autres phénomènes astronomiques. Cette figure d'ailleurs ne saurait se concilier avec les lois de l'Hydrostatique ni avec celles de la précession et de la nutation, qui défendent de supposer au sphéroïde terrestre un aplatissement plus grand que dans le cas où toutes ses couches seraient d'égale densité, c'est-à-dire supérieure à $\frac{1}{230}$.

Les valeurs de ah et de Є sont celles qui conviennent à la figure elliptique du méridien terrestre qui donne un *minimum* pour la plus grande des erreurs commises dans les mesures qui ont servi à déterminer l'arc compris entre Dunkerque et Montjoui; si l'on substitue ces valeurs dans les équations (f), on trouve, pour ces erreurs exprimées en secondes,

$$e_1 = -0'',33, \quad e_2 = +0'',39, \quad e_3 = -1'',36,$$
$$e_4 = +2'',03, \quad e_5 = -0'',72.$$

Ainsi, la plus grande erreur ne monte pas à plus de 2″, et leur moyenne, abstraction faite du signe, est de 0″,96; ces erreur sont comprises par conséquent dans les limites de celles dont les observations sont susceptibles.

Mais pour mieux se convaincre que les mesures qui résultent des opérations exécutées en France ne permettent pas de supposer à la Terre une ellipticité de $\frac{1}{230}$, et, à plus forte raison, une ellipticité moins considérable, supposons dans les équations (f) $\alpha h = \frac{1}{230}$, on aura

$$\begin{aligned} e_1 &= 4.765498 - 13.580713.\zeta, \\ e_2 &= 2.913979 - 8.305765.\zeta, \\ e_3 &= -0.049176 + 0.136690.\zeta, \\ e_4 &= -2.719375 + 7.751264.\zeta, \\ e_5 &= -4.910927 + 13.998523.\zeta. \end{aligned}$$

En combinant entre elles ces équations, on trouve

$$0 = -178.7527 + \zeta h.509.48074,$$

d'où l'on tire, pour la valeur de ζ qui rend la plus grande des erreurs un *minimum*, $\zeta = 0.356855$, et par suite pour la longueur du degré moyen,

$$s = 28502^{\text{mod.}},$$

valeur qui s'accorde assez bien avec celle de 2850 qui résulte de la comparaison du degré de France celui du Pérou. En substituant pour ζ sa valeur dans les équations précédentes, on trouve

$e_1 = +2'',40$, $e_2 = -0'',46$, $e_3 = -4'',38$,
$e_4 = +0'',67$, $e_5 = +1'',76$.

La plus grande erreur serait, dans ce cas, de $-4'',38$. Or, l'excessive précision avec laquelle ont été faites es observations ne permet pas de supposer dans la détermination des latitudes une erreur aussi considé-able. L'aplatissement de $\frac{1}{145}$ que les observations aites en France en 1801 donnent au sphéroïde errestre, a d'ailleurs été confirmé par les opérations exécutées depuis en Angleterre pour mesurer des arcs du méridien et des perpendiculaires à la méri-dienne; tout porte donc à croire que les anomalies que présentent leurs résultats tiennent à quelque cause particulière qui, dans ces contrées, écarte sen-siblement la Terre de la figure elliptique ou qui, altérant d'une manière irrégulière l'homogénéité de ses couches, fait dévier de quelques secondes, soit vers le midi, soit vers le nord, le fil-à-plomb de l'ins-trument qui sert à fixer les latitudes des arcs mesurés. On peut conclure de ces observations et de celles qui sont développées dans les numéros précédens, que la surface de la Terre étant très irrégulière, ainsi que la densité des couches qui l'avoisinent, la mesure isolée d'un arc de méridien, quelle que soit son éten-due, est peu propre à servir à la détermination exacte de la figure de la Terre; on tire, au contraire, de la comparaison de deux arcs du méridien mesu-rés à des latitudes très distantes, des notions sur cette importante question, qui s'accordent très bien

avec celles qui résultent des autres phénomènes, parce qu'à ces grandes distances, les effets qui tiennent aux inégalités de la surface du globe et à la non homogénéité de ses parties disparaissent, pour ne laisser subsister que ceux qui dépendent de sa forme générale.

44. Considérons maintenant les variations de la pesanteur aux diverses latitudes, et déterminons la figure elliptique la plus probable qui en résulte pour le sphéroïde terrestre. Les observations des longueurs du pendule à secondes, qui servent à reconnaître ces variations, sont plus faciles à exécuter que celles de la mesure des degrés du méridien; les anomalies qu'elles présentent sont aussi beaucoup moins considérables, parce que les irrégularités de la Terre exercent sur ces observations une influence bien moins sensible que sur les autres : on doit donc obtenir par ce procédé des notions plus certaines sur la figure du globe que par les mesures directes prises à sa surface.

Parmi les nombreuses observations qui ont été faites des longueurs du pendule, nous choisirons les cinq suivantes. Le pendule dont il est ici question est celui qui fait 86400 oscillations dans un jour moyen, et les mesures ont été réduites au niveau des mers, dans le vide et à la même température.

Lieux des Observations.	Latitudes L.	Longueur du pendule à secondes l.	Noms des Observateurs.
		mèt.	
Pérou..........	0° 0′	0,990564	Bouguer.
Petit-Goave......	18.27	0,991150	Bouguer.
Paris..........	48.24	0,993867	Biot, Mathieu.
Pétersbourg......	58.15	0,994589	Mallet.
Laponie.........	67. 4	0,995325	Clairaut, Maupertuis, etc.

On voit, par les résultats de ce tableau, que les longueurs du pendule à secondes augmentent d'une manière très sensible en allant de l'équateur au pôle. Soumettons ces accroissemens à la loi de la proportionnalité au carré du sinus de la latitude, pour reconnaître s'ils confirment l'hypothèse de la figure elliptique du sphéroïde terrestre.

En substituant, dans les équations (b), les valeurs précédentes, on trouve

$$\left.\begin{array}{l} 0^{m},990564 - a - b.0,00000 = e_1, \\ 0\ ,991150 - a - b.0,10016 = e_2, \\ 0\ ,993867 - a - b.0,56672 = e_3, \\ 0\ ,994589 - a - b.0,72307 = e_4, \\ 0\ ,995325 - a - b.0,84829 = e_5, \end{array}\right\} (g)$$

et en appliquant à ces équations la méthode des moindres carrés, on aura, pour déterminer les valeurs des constantes a et b qui donnent un *minimum* pour la plus grande des erreurs dont sont affectées les mesures du pendule que nous avons adoptées,

$$0^m,993099 - a - b.0,44765 = 0,$$
$$0\ ,994548 - a - b.0,70306 = 0,$$

d'où l'on tire

$$a = 0^m,990555, \quad b = 0^m,0056786.$$

On aura donc généralement, pour l'expression de la longueur du pendule correspondante à une latitude L,

$$0^m,990555 + 0^m,005679.\sin^2 L.$$

La valeur de a est celle du pendule équatorial, et l'on a $\frac{b}{a} = 0,0057331$. L'aplatissement du sphéroïde, d'après le n° 35, est égal à cinq demi du rapport de la force centrifuge à la pesanteur sous l'équateur, moins la valeur de la fraction précédente; ce rapport pour la Terre est de $\frac{1}{289}$, n° 16, livre Ier; l'ellipticité du sphéroïde terrestre est par conséquent de $0,00865 - \frac{b}{a}$, ou de $\frac{1}{342}$. C'est l'aplatissement de l'ellipsoïde le plus vraisemblable qu'indiquent pour la Terre les mesures du pendule rapportées dans le tableau précédent; il s'accorde d'une manière satisfaisante avec celui que nous avons déduit, n° 41, de la comparaison des degrés du méridien mesurés dans des lieux séparés par de grands intervalles, et avec l'aplatissement de $\frac{1}{304}$, qu'on déduit des inégalités qui résultent dans le mouvement de la Lune de la non sphéricité de la Terre.

Si l'on substitue pour a et b leurs valeurs précédentes dans les équations (g), on aura

$$e_1 = 0^m,000009, \quad e_2 = 0^m,000026, \quad e_3 = 0^m,000094,$$
$$e_4 = -0^m,000072, \quad e_5 = -0^m,000047.$$

Ainsi donc, dans la combinaison même la plus favorable qu'on puisse faire de ces équations, on est forcé d'admettre une erreur de $0^m,000094$ dans les mesures des longueurs du pendule que nous avons employées dans les recherches précédentes, si l'on suppose que ces longueurs varient comme le carré du sinus de la latitude. Cette erreur n'excède pas au reste la limite des inexactitudes dont les observations sont susceptibles, et elle est beaucoup plus faible que les erreurs correspondantes dans la mesure des degrés du méridien; ce qui prouve, comme nous l'avons dit n° 38, que les causes qui écartent la Terre de la figure elliptique ont beaucoup moins d'influence sur les variations du pendule que sur celles des degrés mesurés à sa surface.

Cependant il est à remarquer que, bien qu'elles soient moins sensibles, les mêmes irrégularités qu'on observe dans les degrés du méridien conclus d'arcs très rapprochés entre eux, se reproduisent dans les longueurs du pendule à secondes. Ainsi, par exemple, la plus grande de ces anomalies dans les degrés mesurés en France et en Espagne, par Delambre et Méchain, se trouve dans l'arc compris entre les parallèles de Formentera et de Barcelone, et les variations de degrés subissent entre ces deux points un ralentissement considérable; de même, les variations du

de sa révolution, exprimé en jours; sa force centrifuge sera à celle qui anime un élément de la masse de Jupiter placé à l'unité de distance de l'axe de rotation, comme $\frac{D}{T^2}$ est à $\frac{1}{T'^2}$, T' étant le temps de la rotation de Jupiter, exprimé en fractions du jour. La force centrifuge du satellite est d'ailleurs égale à la force qui retient cet astre dans son orbite, c'est-à-dire à la masse M de Jupiter, divisée par D^2; on aura donc

$$n^2 = \frac{MT^2}{D^3T'^2}.$$

On a d'ailleurs, n° 25, $M = \frac{4}{3}\pi h^3(1+\lambda^2)$; on aura donc

$$q = \frac{n}{\frac{4}{3}\pi} = \frac{h^3(1+\lambda^2)T^2}{D^3T'^2}.$$

D'après les observations de Pound, rapportées par Newton, la distance du quatrième satellite de Jupiter à son centre est égale à 26,63 demi-diamètres de l'équateur de cette planète; ce qui donne

$$\frac{h(1+\lambda^2)}{D} = \frac{1}{26,63};$$

on a de plus

$$T = 16^j,68902, \quad T' = 0^j,41377.$$

On conclura de là

$$q = \frac{0,086145}{\sqrt{1+\lambda^2}};$$

et en substituant cette valeur dans l'équation (h),

elle deviendra

$$\text{arc tang}\,\lambda = \frac{9\lambda\sqrt{1+\lambda^2} + 0,172290\lambda^3}{9+3\lambda^2};$$

d'où l'on tire $\lambda = 0,4810$, et, par suite, le rapport de l'axe du pôle à l'axe de l'équateur, ou $\sqrt{1+\lambda^2} = 1.10967$.

Ce rapport, suivant les observations de Pound, est de 1,0771. On trouve, par la théorie des satellites de Jupiter, qui détermine ce rapport avec plus de précision encore que les observations directes, qu'il est de 1,0747. Ces résultats montrent que Jupiter est moins aplati que dans le cas de l'homogénéité, et que, par conséquent, sa densité va en augmentant, comme celle de la Terre, de la surface au centre.

Nous avons vu, n° 34, qu'en supposant les planètes originairement fluides, leur ellipticité devait être comprise entre $\frac{5}{4}q$ et $\frac{1}{2}q$, la première de ces limites répondant au cas où la masse fluide serait homogène, et la seconde à celui où toute la masse serait réunie à son centre. Or, l'ellipticité d'un ellipsoïde est l'excès de l'axe de l'équateur sur celui du pôle, divisé par le dernier de ces axes; sa valeur est donc égale à $\sqrt{1+\lambda^2} - 1$; on aura donc, par ce qui précède, $\frac{5}{4}q = 0,10967$, et par conséquent $\frac{1}{2}q = 0,04385$. On trouve, par l'observation directe, 0,0771, et par le mouvement des nœuds des orbites des satellites de Jupiter, 0,0747 pour l'ellipticité de cette planète: ces deux valeurs sont donc comprises dans les limites que leur assigne la théorie.

Nous avons trouvé, n° 29, dans le cas de l'homogénéité, 0,004334 pour l'ellipticité de la Terre. En

supposant donc la densité de la Terre égale à celle de Jupiter, leurs ellipticités seront entre elles comme 0,10967 est à 0,004334. D'après cela, en adoptant pour l'ellipticité de Jupiter la valeur 0,0747, qui résulte de la théorie des satellites, on trouve $\frac{1}{338,72}$ pour l'aplatissement de la Terre, et $\frac{1}{328,17}$, en choisissant l'ellipticité 0,0771, qui est donnée par l'observation directe. On voit que ces résultats s'accordent suffisamment bien avec ceux que l'on tire des observations du pendule et de la mesure des arcs du méridien terrestre, et l'analogie qui existe entre la figure de Jupiter et celle de la Terre prouve avec évidence que la même loi a présidé à la formation de tous les corps célestes.

Les autres planètes sont trop éloignées de nous, où leur aplatissement est trop peu sensible, pour que l'observation ait pu jusqu'ici fournir les élémens nécessaires à la comparaison des phénomènes et de la théorie. Il en est de même de la Lune, qui se présente à l'observateur comme un corps à très peu près sphérique; les conséquences qui résultent des lois de sa libration, et que nous avons développées dans le chapitre VI du livre IV, sont les seules données que nous ayons sur sa véritable figure.

46. Nous ne terminerons pas ce chapitre, spécialement consacré à la figure de la Terre, sans montrer comment les phénomènes de la précession et de la nutation confirment, comme nous l'avons annoncé, les résultats que l'on obtient par la mesure des arcs du méridien terrestre, et par les observations du pendule. Pour le faire voir, reprenons la valeur de

la fonction V; donnée n° 25, livre IV,

$$V = \frac{ML}{r} - \frac{L}{4r^3}.(A+B+C)$$
$$+ \frac{3L}{4r^5}.[x^2(B+C-A)+y^2(A+C-B)+z^2(A+B-C)].$$

Dans cette expression, A, B, C sont les trois momens d'inertie de la Terre, qui se rapportent respectivement aux axes principaux des x, des y et des z; M est la masse de la Terre, et x, y, z expriment les trois coordonnées de l'astre L.

On aura en vertu du n° 36, pour l'expression générale de la fonction V, relativement à la Terre, supposée elliptique et douée d'un mouvement de rotation autour d'un axe fixe,

$$V = \frac{ML}{r} + \frac{MLa^2}{r^3}.[(\alpha h - \tfrac{1}{2}q).(\tfrac{1}{3} - \cos^2\theta) + \alpha h' \sin^2\theta \cos^2\varpi],$$

αh et $\alpha h'$ étant deux constantes qui dépendent de l'aplatissement de la Terre, et q le rapport de la force centrifuge à la pesanteur sous l'équateur.

Désignons par θ l'angle que forme le rayon r avec l'axe de rotation que nous avons pris, n° 15, livre IV, pour axe des z, par ω la longitude de ce rayon comptée sur le plan de l'équateur; on aura

$$x = r\sin\theta\sin\omega, \quad y = r\sin\theta\cos\omega, \quad z = r\cos\theta.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans la première des expressions de V, et qu'on compare ensuite ces deux expressions entre elles, on trouvera l'équation suivante :

$$\tfrac{3}{4}.(2C-A-B).(\tfrac{1}{3}-\cos^2\theta)+\tfrac{3}{4}.(A-B).\sin^2\theta\cos 2\varpi$$
$$=Ma^2.[(\alpha h-\tfrac{1}{2}q)(\tfrac{1}{3}-\cos^2\theta)+\alpha h'\sin^2\theta\cos 2\varpi];$$

d'où l'on tire, en vertu de l'indépendance des angles, θ et ϖ,

$$A-B=\tfrac{4}{3}Ma^2\alpha h',$$
$$2C-A-B=\tfrac{4}{3}Ma^2(\alpha h-\tfrac{1}{2}q).$$

Les observations du pendule nous ont montré que l'aplatissement du sphéroïde terrestre est à très peu près le même sur les divers méridiens, ce qui exige que $\alpha h'$ soit une très petite quantité de l'ordre α^2, que l'on peut négliger. On a alors $A=B$, d'où résulte ce théorème remarquable, c'est que *les phénomènes de la précession des équinoxes et de la nutation de l'axe terrestre sont les mêmes que si la Terre était un sphéroïde de révolution.*

Si l'on considère la Terre comme un ellipsoïde de révolution autour de l'axe des z, on aura, par les propriétés de ces corps,

$$C=\frac{2Ma^2}{5\sigma},$$

σ étant un nombre qui dépend de la loi de densité des différentes couches du sphéroïde, et que l'expérience seule peut déterminer; elle a montré que, pour la Terre, ce nombre diffère peu de l'unité. On aura donc ainsi

$$\frac{2C-A-B}{C}=\frac{10\sigma}{3}(\alpha h-\tfrac{1}{2}q).$$

Nous avons trouvé, n° 39, livre IV,

$$\frac{2C - A - B}{C} = 0{,}00619012;$$

on aura donc

$$ah - \tfrac{1}{2}q = \frac{0{,}00185704}{\sigma}. \qquad (k)$$

Le rapport que désigne σ est égal à l'unité dans le cas de l'homogénéité; il est plus grand que l'unité, si la densité du sphéroïde va en croissant de la surface au centre, et moindre que ce nombre dans le cas contraire. Supposons donc la Terre homogène; on aura $\sigma = 1$: on a d'ailleurs, par l'observation, $q = \frac{1}{289}$: on aura donc, dans ce cas, $ah = 0{,}0035871$, ou $\frac{1}{279}$. La supposition de $ah = \frac{1}{578}$ donnerait pour σ une valeur infinie : la valeur de ah est donc comprise entre $\frac{1}{279}$ et $\frac{1}{578}$, et ce sont par conséquent les limites que les phénomènes de la précession et de la nutation assignent à l'aplatissement du sphéroïde terrestre.

En prenant une moyenne entre les valeurs de l'aplatissement de la Terre, qui résultent de la comparaison des degrés mesurés à sa surface, et des observations du pendule, on peut supposer cet aplatissement de $\frac{1}{320}$ à peu près. Cette valeur est comprise entre les limites précédentes. Si on la substitue au lieu de ah, et qu'on remplace en même temps q par sa valeur dans l'équation (k), on en tire

$$\sigma = 1{,}32560:$$

ainsi donc la quantité σ étant plus grande que l'unité, la densité de la Terre va en croissant de la surface au centre, ce qui est conforme aux expériences de Cavendish et aux lois de l'Hydrostatique, qui exigent que si la Terre était originairement fluide, les parties les plus denses soient en même temps les plus voisines du centre.

47. Si l'on embrasse maintenant d'un même regard les résultats que nous venons de recueillir par tant de moyens différens sur la figure de la Terre, sans doute on sera surpris de leur parfait accord, et convaincu qu'ils ne peuvent être que les effets d'une même cause qui lie entre eux tous les phénomènes qui dépendent de la nature et de la constitution du globe. La mesure des degrés des méridiens terrestres, qui paraît la méthode la plus simple que la nature nous ait indiquée pour déterminer la figure de notre planète, n'est cependant pas celle dont on doive attendre des résultats plus certains; toutefois, en combinant avec adresse des observations faites à des latitudes très distantes pour diminuer l'effet des irrégularités de la Terre dans quelques-unes de ses parties, on détermine, par ce moyen, la valeur très approchée de son aplatissement. Cette valeur s'accorde d'une manière remarquable avec celle qui résulte des observations du pendule, méthode d'investigation moins directe, mais plus sûre que la précédente, et que l'homme n'a due qu'à son génie. Les phénomènes de la précession et de la nutation ne font pas connaître la valeur absolue de la fraction qui exprime l'aplatissement de la Terre; ils déterminent

seulement deux limites, que cette fraction ne peut pas dépasser, et les valeurs que lui assignent la mesure des arcs du méridien et les longueurs du pendule sont comprises entre ces limites. Les mêmes phénomènes fournissent des notions précieuses sur la constitution intérieure du sphéroïde terrestre; ils ne donnent point, il est vrai, la loi rigoureuse des densités des couches qui le composent, et l'on peut encore satisfaire par une infinité d'hypothèses à l'unique condition qu'ils imposent, mais ils indiquent un accroissement dans les densités à mesure que l'on approche du centre : résultats que confirment les phénomènes de la stabilité de l'équilibre des mers, le peu de déviation qu'éprouve le fil-à-plomb par l'attraction des montagnes, les mesures directes des arcs du méridien et des longueurs du pendule, qui nous ont montré que la Terre est plus aplatie que dans le cas de l'homogénéité; résultat enfin qui est une suite nécessaire des lois de l'Hydrostatique, lorsqu'on suppose que la Terre était originairement fluide, et que ses élémens ont conservé, en se durcissant, la même disposition qu'ils avaient dans leur premier état.

L'admirable concordance de tous ces résultats n'est pas sans doute ce qu'offre de moins merveilleux la théorie de la pesanteur universelle. Si son influence se montre d'une manière moins manifeste et moins régulière dans les phénomènes qui dépendent de la figure des corps célestes et de leurs mouvemens autour de leur centre de gravité, que dans ceux qui se rapportent aux mouvemens de ces centres dans

l'espace, c'est que cette influence, comme nous l'avons vu, est, dans ces phénomènes, modifiée sans cesse par les circonstances particulières dépendantes de la constitution de ces corps. Le géomètre, par la même raison, a éprouvé plus d'obstacles pour les soumettre au calcul; mais le succès a couronné ses efforts. Un homme de génie avait deviné la cause secrète qui met en mouvement la matière; l'analyse mathématique, en ramenant à ce principe unique tous les phénomènes de l'univers, ceux même qu'il paraissait le plus difficile d'y soumettre, a démontré, par la preuve la plus irréfragable, qu'il était la véritable loi de la nature.

FIN DU SECOND VOLUME.

NOTES.

NOTE PREMIÈRE.

Sur le mouvement de rotation.

(*Voir* page 114, 1[er] vol.) Les relations (l) peuvent s'obtenir de différentes manières; celle que nous indiquons est la plus simple. On trouve ainsi

$$Kx' = (b'c'' - b''c')\,x + (b''c - bc'')\,y + (bc' - b'c)\,z,$$
$$Ky' = (a''c' - a'c'')\,x + (ac'' - a''c)\,y + (a'c - ac')\,z,$$
$$Kz' = (a'b'' - a''b')\,x + (a''b - ab'')\,y + (ab' - a'b)\,z,$$

en supposant, pour abréger,

$$K = a(b'c'' - b''c') + a'(b''c - bc'') + a''(bc' - b'c).$$

Or, par la comparaison des équations précédentes aux équations (2), on trouve

$$a = \frac{b'c'' - b''c'}{K}, \quad a' = \frac{b''c - bc''}{K}, \quad a'' = \frac{bc' - b'c}{K}.$$

Si l'on ajoute les carrés de ces trois valeurs, on aura, en vertu des relations (m) et (n),

$$K^2 = (b'c'' - b''c')^2 + (b''c - bc'')^2 + (bc' - b'c)^2 = 1,$$

par conséquent,

$$a = b'c'' - b''c', \quad a' = b''c - bc'', \quad a'' = bc' - b'c,$$

etc.

(*Voir* page 119, ligne 17, 1[er] vol.) Cette belle propriété des momens est facile à démontrer par ce qui précède. En effet, on a, par le n° 29 et par la supposition,

$$\begin{aligned} M &= S.(yZ - zY).dm, & N &= S.(y'Z' - z'Y').dm, \\ M' &= S.(zX - xZ).dm, & N' &= S.(z'X' - x'Z').dm, \\ M'' &= S.(xY - yX).dm, & N'' &= S.(x'Y' - y'X').dm. \end{aligned}$$

Substituons pour x', y', z', X', Y', Z', leurs valeurs, en observant que les forces X', Y', Z' résultent de X, Y, Z, par la même transformation que les coordonnées x', y', z' des coordonnées x, y, z. On aura, en vertu des formules (2), n° 28,

$$N = S.[(bx + b'y + b''z)(cX + c'Y + c''Z) - (cx + c'y + c''z)(bX + b'Y + b''Z)].dm$$

ou bien en réduisant et observant que l'intégrale S se rapporte uniquement à l'élément dm et aux quantités qui varient avec lui,

$$\begin{aligned} N = (b'c'' - b''c').S.(yZ - zY)dm + (b''c - bc'').S.(zX - xZ) \\ + (bc' - b'c).S.(xY - yX). \end{aligned}$$

On trouverait pour N' et N'' des expressions semblables, et en vertu des relations (l), n° 28, on aura

$$\begin{aligned} N &= aM + a'M' + a''M'', \\ N' &= bM + b'M' + b''M'', \\ N'' &= cM + c'M' + c''M''. \end{aligned}$$

Il existe donc entre les coordonnées, les forces, les momens, et les projections, rapportés à deux systèmes d'axes rectangulaires, des relations analogues, et leur transformation s'opère de la même manière, en multipliant chacune de ces quantités relatives aux trois premiers axes par les cosinus des angles qu'ils forment respectivement avec le nouvel axe que l'on considère.

NOTE II.

Sur l'intégration des équations différentielles du mouvement elliptique. (Voir la p. 240 du 1er vol.)

Les géomètres ont combiné de toutes les manières imaginables les équations (a) pour en déduire, sous des formes variées, les diverses intégrales qu'elles peuvent fournir. Les méthodes les plus savantes de l'Analyse ont été prodiguées en cette occasion d'une manière très superflue, et ces intégrales, sous quelque forme qu'elles se présentent, peuvent aisément se déduire des équations (b) et (c) jointes aux deux suivantes qui résultent très simplement des équations (a):

$$\left.\begin{aligned}\frac{dxd^2x+dyd^2y+dzd^2z}{dt^2}+\frac{\mu\,(xdx+ydy+zdz)}{r^3}&=0,\\ \frac{xd^2x+yd^2y+zd^2z}{dt^2}+\frac{\mu.(x^2+y^2+z^2)}{r^3}&=0.\end{aligned}\right\}(p)$$

Ainsi, par exemple, si l'on observe que

$$xd^2x+yd^2y+zd^2z=d.(xdx+ydy+zdz)-dx^2-dy^2-dz^2,$$

la seconde de ces équations devient

$$\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}-\frac{d.rdr}{dt^2}-\frac{\mu}{r}=0.$$

On a d'ailleurs, en faisant $c^2+c'^2+c''^2=k^2$,

$$r^2\left(\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}\right)-\left(\frac{rdr}{dt}\right)^2=k^2.$$

Si entre ces deux équations on élimine $\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}$, on trouve

$$\frac{d^2r}{dt^2}+\frac{\mu r-k^2}{r^3}=0,$$

et en faisant $s = \mu r - k^2$,

cette équation prend cette forme :

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{\mu s}{r^3} = 0, \qquad (b)$$

équation absolument semblable aux équations (a) ; et de même qu'on satisfait à l'équation en z en faisant $z = mx + ny$, on satisfera à l'équation (q) en faisant $s = px + qy$: c'est une nouvelle intégrale finie des équations (a), et dont les géomètres ont fait un fréquent usage.

Si on multiplie la première des équations (p) par x, et la seconde par dx, et qu'on les retranche l'une de l'autre, on aura

$$\frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{xdy - ydx}{dt} + \frac{d^2z}{dt^2} \cdot \frac{xdz - zdx}{dt} = \mu \cdot \frac{xrd - xdr}{r^2},$$

équation qui, en vertu des intégrales (b) et (c), devient

$$\frac{cd^2y - c'd^2z}{dt} = d.\frac{\mu x}{r}.$$

En l'intégrant et en opérant de la même manière relativement à y et à z, on aura

$$\frac{\mu x}{r} = \frac{cdy - c'dz}{dt} + f,$$
$$\frac{\mu y}{r} = \frac{c''dz - cdx}{dt} + f',$$
$$\frac{\mu z}{r} = \frac{c'dx - c''dy}{dt} + f'',$$

équations très-utiles auxquelles nous sommes parvenus, n° 21, livre II, et que nous avons employées dans la *Théorie des perturbations des comètes*, chap. III, liv. III.

NOTE III.

ır les inégalités planétaires des ordres supérieurs.

e n'ai développé dans les chapitres IX et X du livre II, que artie de ces inégalités indépendante des excentricités et des inaisons, et celle qui dépend de la première puissance de deux élémens, ce qui peut suffire en général. Cependant il ve quelquefois que les inégalités périodiques les plus conrables ne se trouvent pas dans les termes qui résultent de e première approximation, et qu'elles ne se produisent que s les approximations suivantes. Il devient alors nécessaire enir compte des termes qui dépendent des carrés et des ssances supérieures des excentricités et des inclinaisons, et ne de ceux qui dépendent du carré des forces perturbaes. C'est ce qui arrive dans la théorie de Jupiter et de Sane, où une partie des termes relatifs aux cubes et aux cinèmes puissances des excentricités et des inclinaisons devient considérable, à cause du rapport qui existe entre les yens mouvemens de ces deux planètes, rapport qui rend petits les diviseurs que l'intégration fait acquérir à ces nes. Je me propose de revenir dans la suite sur cet objet, le donner les valeurs numériques de toutes les inégalités étaires que la précision des observations modernes peut dre sensibles; ce travail servira en même temps de vérifion aux résultats de la *Mécanique céleste*, et il ne sera pas tile, parce que l'inexactitude de quelques-uns d'entre eux a du cette révision nécessaire. Je n'en citerai ici qu'un nple. La partie des coefficiens de la grande inégalité de Jur et de Saturne, qui dépend du carré de la force perturice, a été déterminée récemment par M. Plana, qui leur signé des valeurs très différentes de celles qui sont rappordans l'ouvrage cité; il en est résulté une contestation asvive à laquelle Laplace lui-même a pris part; cependant

la question était encore demeurée indécise, et l'Académie de Berlin a même proposé un prix dont l'objet principal est de découvrir la cause des différences des résultats obtenus par ces deux géomètres. Dans un mémoire lu au mois de février dernier, à l'Académie des Sciences, j'ai repris en entier ce calcul, et j'ai fait voir qu'il s'était glissé en effet une erreur importante dans les résultats de la *Mécanique céleste*, mais qu'en même temps les nombres que M. Plana proposait de leur substituer n'avaient point non plus toute l'exactitude convenable. Voici les principaux résultats auxquels je suis parvenu. On trouvera dans la *Connaissance des Tems*, pour 1831, le rapport que M. Poisson a fait à l'Académie, sur ce mémoire.

Soient a le demi grand axe, et nt le moyen mouvement au bout du temps t de Jupiter, dans son orbite elliptique; soient r, v, s les trois coordonnées polaires qui déterminent sa position sur cette orbite, et R la fonction qui résulte de l'action perturbatrice de Saturne; enfin, désignons par les mêmes lettres accentuées les quantités analogues relatives à Saturne. Si l'on suppose, pour abréger,

$$\delta R = \frac{dR}{dr}.\delta r + \frac{dR}{dv}.\delta v + \frac{dR}{ds}.\delta s + \frac{dR}{dr'}.\delta r' + \frac{dR}{dv'}.\delta v' + \frac{dR}{ds'}.\delta s'$$

$$\delta R' = \frac{dR'}{dr}.\delta r + \frac{dR'}{dv}.\delta v + \frac{dR'}{ds}.\delta s + \frac{dR'}{dr'}.\delta r' + \frac{dR'}{dv'}.\delta v' + \frac{dR'}{ds'}.\delta s',$$

et que l'on nomme ζ et ζ' ce que deviennent les moyens mouvemens nt et $n't$ par l'action réciproque de Jupiter et de Saturne, la formule (4) du n° 61, livre II, donnera, pour déterminer les parties de ζ et de ζ' qui dépendent du carré des forces perturbatrices, les deux équations suivantes:

$$\delta\zeta = -3an\int dt\int d'.\delta R + \frac{3a^2n}{2}.\int dt.(\int dR)^2,$$

$$\delta\zeta' = -3a'n'\int dt\int d'.\delta R' + \frac{3a'^2n'}{2}.\int dt.(\int dR')^2.$$

Les termes de $\delta\zeta$ et de $\delta\zeta'$ qu'il importe de considérer sont

ceux qui par la double intégration acquièrent le très petit diviseur $(5n' - 2n)^2$, parce qu'il peut en résulter des inégalités sensibles dans l'expression des longitudes moyennes des deux planètes. On les obtiendra en combinant les différens termes des deux facteurs qui composent chacun des produits que contient l'expression de δR et celle de $\delta R'$, de manière que la somme des argumens dont ils dépendent soit toujours égale à $5n' - 2n$. Si l'on se borne à considérer parmi ces termes ceux qui sont du troisième ordre par rapport aux excentricités et aux inclinaisons, c'est-à-dire de l'ordre le moins élevé qu'ils puissent être sous ce rapport, d'après les lois de développement de R et de la formation des valeurs de δr, δv, etc., on verra aisément que les combinaisons dont il s'agit sont au nombre de dousé (1).

Laplace a considéré simplement les termes qui proviennent de la double combinaison des argumens $3n't - nt$ et $2n't - nt$; ce sont en effet les plus considérables; il a négligé de plus, dans l'expression de δR, les termes $\frac{dR}{ds}.\delta s$, et $\frac{dR}{ds'}.\delta s'$, et il a trouvé ainsi en *degrés sexagésimaux* :

$$\delta\zeta = 1''.5703 \sin(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon) - 18''.0710 \cos(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon),$$
$$\delta\zeta' = -3''.8165 \sin(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon) + 42''.9203 \cos(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon).$$

Le nouveau calcul que j'ai fait de ces valeurs m'a donné

$$\delta\zeta = 2'',16304 \sin(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon) + 16''.9712 \cos(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon),$$
$$\delta\zeta' = 3''.4645 \sin(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon) - 46''.3437 \cos(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon).$$

On voit que la principale différence de ces résultats consiste dans les signes, et en effet il a été constaté qu'une erreur s'était introduite, à cet égard, dans la réduction en nombres des formules de la *Mécanique céleste*.

(*) *Connaissance des Tems* pour 1830.

NOTE IV.

Sur la détermination des orbites des comètes, d'après les observations.

La méthode que nous avons développée dans le chapitre I, livre III, pour cet objet, nous paraît, comme nous l'avons dit, celle dont l'application est la plus sûre dans la pratique. Cependant, comme la méthode ingénieuse proposée par Laplace a été adoptée par beaucoup d'astronomes, et qu'il y a même des cas où il est indispensable de l'employer, je pense qu'on ne sera pas fâché de la trouver ici présentée d'une manière plus simple qu'elle ne l'est dans la *Mécanique céleste*.

Cette méthode suppose que l'on connaît, pour une époque donnée, la longitude a et la latitude b de la comète, ainsi que leurs différentielles du premier et du second ordre, prises par rapport au temps et divisées par l'élément de cette variable, c'est-à-dire les quatre quantités $\frac{da}{dt}$, $\frac{d^2a}{dt^2}$ et $\frac{db}{dt}$, $\frac{d^2b}{dt^2}$. On peut en effet, dans ce cas, déterminer par des formules simples et rigoureuses tous les élémens de l'orbite de la manière suivante.

1. Soient x, y, z les trois coordonnées de la comète, rapportées à l'écliptique et au centre du Soleil, r sa distance à cet astre ou son rayon vecteur, X, Y les coordonnées de la Terre dans son orbite, R son rayon vecteur et A sa longitude vue du Soleil, enfin, soit ρ la projection sur l'écliptique de la droite qui joint la comète à la Terre, ou ce qu'on nomme ordinairement la distance accourcie de la comète; on aura

$$x = X + l\rho, \quad y = Y + m\rho, \quad z = n\rho, \quad (1)$$

en supposant pour abréger $l = \cos a$, $m = \sin a$ et $n = \tang b$.

Les équations différentielles du mouvement de là comète autour du Soleil seront

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{x}{r^3}=0,\quad \frac{d^2y}{dt^2}+\frac{y}{r^3}=0,\quad \frac{d^2z}{dt^2}+\frac{z}{r^3}=0. \quad (2)$$

aura de même, relativement à la Terre,

$$X = R \cos A, \quad Y = R \sin A,$$

$$\frac{d^2X}{dt^2}+\frac{X}{R^3}=0,\quad \frac{d^2Y}{dt^2}+\frac{Y}{R^3}=0.$$

substituant donc pour x, y, z, leurs valeurs dans les ations (2), on trouvera, en vertu de ces deux dernières ations,

$$\frac{d^2.l\rho}{dt^2}-\frac{X}{R^3}+\frac{X+l\rho}{r^3}=0,$$

$$\frac{d^2.m\rho}{dt^2}-\frac{Y}{R^3}+\frac{Y+m\rho}{r^3}=0,$$

$$\frac{d^2.n\rho}{dt^2}+\frac{n\rho}{r^3}=0;$$

, en développant et supposant pour abréger, $\sigma=\frac{1}{r^3}-\frac{1}{R^3}$,

$$\left.\begin{aligned} &l.\frac{d^2\rho}{dt^2}+\frac{2dld\rho}{dt^2}+\rho.\left(\frac{d^2l}{dt^2}+\frac{l}{r^3}\right)+X\sigma=0,\\ &m.\frac{d^2\rho}{dt^2}+\frac{2dmd\rho}{dt^2}+\rho.\left(\frac{d^2m}{dt^2}+\frac{m}{r^3}\right)+Y\sigma=0,\\ &n.\frac{d^2\rho}{dt^2}+\frac{2dnd\rho}{dt^2}+\rho\left(\frac{d^2n}{dt^2}+\frac{n}{r^3}\right)=0.\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

éliminant $\frac{d^2\rho}{dt^2}$, on trouve

$$\left.\begin{aligned} &\frac{(ndl-ldn)}{dt}+\frac{\rho}{2}.\left(\frac{nd^2l-ld^2n}{dt^2}\right)+\tfrac{1}{2}\,nX\sigma=0,\\ &\frac{(ndm-mdn)}{dt}+\frac{\rho}{2}.\left(\frac{nd^2m-md^2n}{dt^2}\right)+\tfrac{1}{2}\,nY\sigma=0,\\ &\frac{(ldm-mdl)}{dt}+\frac{\rho}{2}.\left(\frac{ld^2m-md^2l}{dt^2}\right)+\tfrac{1}{2}.(lY-mX)\sigma=0,\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Ces équations n'équivalent qu'à deux distinctes ; et en effet, en multipliant la première par n et en la retranchant ensuite de la seconde multipliée par m, on retrouve la troisième.

Si maintenant on élimine $\frac{d\varrho}{dt}$ entre les deux premières équations (4), ou, ce qui revient au même, si après avoir multiplié ces équations, la première par dm, la seconde par $-dl$, et la troisième par dn, on les ajoute, et que pour abréger on fasse

$$h = \frac{\mathrm{X}.(ndm - mdn) + \mathrm{Y}.(ldn - ndl)}{\frac{d^2l}{dt^2}.(mdn - ndm) + \frac{d^2m}{dt^2}.(ndl - ldn) + \frac{d^2n}{dt^2}.(ldm - mdl)},$$

on aura

$$\varrho = h.\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{\mathrm{R}^3}\right). \quad (5)$$

D'ailleurs

$$r^2 = \mathrm{R}^2 + 2\mathrm{R}\varrho\cos(\mathrm{A} - a) + \frac{\varrho^2}{\cos^2 b}. \quad (6)$$

On a donc deux équations au moyen desquelles on peut déterminer r et ϱ. Si l'on éliminait ϱ entre ces deux équations, on arriverait à une équation du huitième degré en r, mais qui s'abaisserait au septième, comme nous l'avons vu n° 6, liv. III.

Les valeurs de r et ϱ étant connues, on aura celle de $\frac{d\varrho}{dt}$ au moyen de l'une quelconque des équations (4) ; mais au lieu d'employer indistinctement ces équations à cette recherche, il est bon de combiner les deux premières de cette manière : on multipliera la première par l et la seconde par m, on les ajoutera ensuite, en observant que $l^2 + m^2 = 1$, ce qui donne

$$ldl + mdm = 0, \quad ld^2l + md^2m = -dl^2 - dm^2,$$

et l'on pourra substituer aux équations (4) les deux suivantes :

$$\left.\begin{array}{l}\frac{d\rho}{dt}\cdot\frac{dn}{dt}+\frac{\rho}{2}\cdot\left[\frac{d^2n+n(dl^2+dm^2)}{dt^2}\right]-\frac{nr}{2}\cdot(lX+mY)=0,\\ \frac{d\rho}{dt}\cdot\left(\frac{ldm-mdl}{dt}\right)+\frac{\rho}{2}\cdot\left(\frac{ld^2m-md^2l}{dt^2}\right)+\frac{r}{2}\cdot(lY-mX)=0.\end{array}\right\}(7)$$

C'est entre ces deux équations qu'il conviendra de choisir pour déterminer la valeur de $\frac{d\rho}{dt}$, parce que la première est indépendante des différentielles secondes de m et de l, et la seconde de la différentielle de n, ce qui offre des avantages dans les applications, comme on le verra plus bas.

Si après avoir substitué pour l, m, n leurs valeurs dans les équations (1), on les différencie, on trouve, en conservant la notation établie n° 2, livre cité,

$$\left.\begin{array}{l}x'=X'+\frac{d\rho}{dt}.\cos a-\rho.\sin a\frac{da}{dt},\\ y'=Y'+\frac{d\rho}{dt}.\sin a+\rho.\cos a\frac{da}{dt},\\ z'=\frac{d\rho}{dt}.\text{tang}\, b+\frac{\rho}{\cos^2 b}.\frac{db}{dt}.\end{array}\right\}(8)$$

Ces équations ne contenant que des quantités connues, puisque les valeurs de ρ et de r sont supposées déterminées par ce qui précède, en les réunissant aux équations (1), on pourra déterminer les six quantités x, y, z, x', y', z', et l'on en conclura les élémens de l'orbite elliptique de la comète, comme on l'a fait n° 16, livre III.

La question est donc ainsi complètement résolue; mais si l'on suppose à l'ordinaire que l'orbite est une parabole, on aura, par la nature de cette courbe,

$$\frac{2}{r}=x'^2+y'^2+z'^2,$$

équation qui, en y substituant pour x', y', z' leurs valeurs, prendra cette forme

$$\frac{2}{r} = M + N.\varrho\frac{d\varrho}{dt} + P.\varrho^2 + Q.\frac{d\varrho^2}{dt^2}. \quad (9)$$

La question dans ce cas présente donc une équation de plus que d'inconnues, et l'on peut en profiter pour éviter l'emploi des données qui participeraient le plus aux erreurs des observations. Pour cela, nous remarquerons que les inexactitudes dont elles sont susceptibles deviennent surtout sensibles sur les différences secondes $\frac{d^2a}{d^2t}$, $\frac{d^2b}{dt^2}$, parce qu'étant beaucoup plus petites que les premières, ces erreurs en forment une plus grande partie aliquote. Il faut donc en éviter l'emploi autant que possible, et comme on ne peut pas les rejetèr toutes deux à la fois, on ne conservera que celle qu'on doit croire la plus correcte, ce qu'il sera toujours facile de reconnaître. D'après cela, on ne fera point usage, pour déterminer ϱ, de l'équation (5), parce que le coefficient h dépend à la fois des différences secondes de la longitude et de la latitude; on lui substituera l'équation (9). Quant aux équations (7), qui déterminent $\frac{d\varrho}{dt}$, on emploiera la première ou la seconde, selon qu'on voudra conserver les différences secondes de la longitude ou celles de la latitude; en y substituant pour l, m, n leurs valeurs, et en faisant pour abréger

$$\frac{d\varrho}{dt} = k\varrho + k'\sigma, \quad (10)$$

on aura dans le premier cas,

$$k = -\tfrac{1}{2}.\left(\frac{\frac{d^2b}{dt^2} + \sin b\cos b\frac{da^2}{dt^2} + 2\,\text{tang}\,b\frac{db^2}{dt^2}}{\frac{db}{dt}}\right),$$

$$k' = \tfrac{1}{2}.\left[\frac{R\sin b\cos b\cos(A-a)}{\frac{db}{dt}}\right].$$

et dans le second,

$$k=-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\frac{d^2a}{dt^2}}{\frac{da}{dt}},\quad k'=-\tfrac{1}{2}\cdot\left[\frac{\mathrm{R}\sin(\mathrm{A}-a)}{\frac{da}{dt}}\right].$$

En réunissant donc les trois équations (6), (10), (9), après avoir développé cette dernière, et substitué pour X′ et Y′ leurs valeurs données par les formules

$$\mathrm{X}'=-\left(\frac{1-\frac{1}{2}e^2}{\mathrm{R}}\right).\sin\mathrm{A}+e\sin(\mathrm{A}-\varpi).\cos\mathrm{A},$$

$$\mathrm{Y}'=\left(\frac{1-\frac{1}{2}e^2}{\mathrm{R}}\right).\cos\mathrm{A}+e\sin(\mathrm{A}-\varpi).\sin\mathrm{A},$$

on aura pour déterminer les inconnues r, ρ, $\frac{d\rho}{dt}$, les trois équations suivantes :

$$\left.\begin{aligned}
&r^2=\mathrm{R}^2+2\mathrm{R}\cos(\mathrm{A}-a).\rho+\frac{\rho^2}{\cos^2 b},\\
&\frac{d\rho}{dt}=k\rho+k'\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{\mathrm{R}^3}\right),\\
&\frac{2}{r}=\frac{2}{\mathrm{R}}-1+\frac{d\rho^2}{dt^2}+\rho^2.\frac{da^2}{dt^2}+\left(\frac{d\rho}{dt}.\mathrm{tang}\,b+\rho.\frac{\frac{db}{dt}}{\cos^2 b}\right)^2\\
&\quad+2\frac{d\rho}{dt}.\left[e\sin(\mathrm{A}-\varpi).\cos(\mathrm{A}-a)-\frac{1-\frac{1}{2}e^2}{\mathrm{R}}.\sin(\mathrm{A}-a)\right]\\
&\quad+2\rho\frac{da}{dt}.\left[e\sin(\mathrm{A}-\varpi).\sin(\mathrm{A}-a)+\frac{1-\frac{1}{2}e^2}{\mathrm{R}}.\cos(\mathrm{A}-a)\right].
\end{aligned}\right\}\ (\mathrm{A})$$

On satisfera à ces équations par des essais ; pour cela, on donnera d'abord à r une valeur arbitraire, on supposera, par exemple, $r=1$; on déduira des deux premières équations (A) les valeurs correspondantes de ρ et $\frac{d\rho}{dt}$, et en les substituant dans la troisième, elle fera connaître l'erreur de la supposition. Après quelques épreuves, on déterminera de cette ma-

nière, avec toute la précision nécessaire, les trois quantités r, ϱ, $\frac{d\varrho}{dt}$; on pourra ensuite vérifier ces valeurs en les substituant dans celle des équations (7) qui n'aura pas été employée à la solution du problème.

Les équations (A) conviennent à tous les cas qui peuvent se présenter; cependant, comme leur résolution entraîne dans des calculs pénibles, nous observerons qu'on peut éviter cet inconvénient dans un cas très étendu, celui où les données du problème permettent de faire usage à la fois des deux équations (7). En effet, en éliminant entre elles l'inconnue σ, on trouve

$$\frac{d\varrho}{dt} = i\varrho, \qquad (a)$$

en supposant pour abréger

$$i = -\tfrac{1}{2}\cdot\frac{X(nd^2m - md^2n) - Y(nd^2l - ld^2n)}{X(ndm - mdn) - Y(ndl - ldn)},$$

ou bien

$$i = -\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\cos(A-a).\frac{d^2a}{dt^2} + \sin(A-a).\left(\frac{da^2}{dt^2} + \frac{1}{\sin b\cos b}.\frac{d^2b}{dt^2} + \frac{2}{\cos^2 b}.\frac{db^2}{dt^2}\right)}{\cos(A-a).\frac{da}{dt} + \frac{\sin(A-a)}{\sin b\cos b}.\frac{db}{dt}}.$$

Si dans la troisième des équations (A) on substitue pour $\frac{d\varrho}{dt}$ sa valeur (a), on aura

$$\left.\begin{aligned}
&r^2 = R^2 + 2R\cos(A-a).\varrho + \frac{\varrho^2}{\cos^2 b},\\
&\frac{2}{r} = \frac{2}{R} - 1 + 2.\Big\{ i.\Big[e\sin(A-\varpi).\cos(A-a) - \frac{1-\frac{1}{2}e^2}{R}.\sin(A-a)\Big]\\
&\qquad + \frac{da}{dt}.\Big[e\sin(A-\varpi).\sin(A-a) + \frac{1-\frac{1}{2}e^2}{R}.\cos(A-a)\Big]\Big\}.\varrho\\
&\qquad + \left[i^2 + \frac{da^2}{dt^2} + \left(i\tang b + \frac{\frac{db}{dt}}{\cos^2 b}\right)^2\right].\varrho^2;
\end{aligned}\right\} (B).$$

et le problème est alors réduit à la résolution de ces deux équations. Elles feront connaître immédiatement r et ρ, et l'on en conclura $\frac{d\rho}{dt}$ au moyen de l'équation (a).

On pourra employer ces formules avec sûreté, toutes les fois que le numérateur et le dénominateur de l'expression de i ne deviendront pas de trop petites quantités pour être déterminées avec précision, ce qui arriverait, comme il est facile de s'en assurer, dans le cas particulier où le Soleil se trouverait situé à très peu près dans le même plan que l'orbite apparente de la comète, à l'époque de l'observation moyenne. La méthode précédente, ainsi simplifiée, est sans contredit la plus commode que l'on puisse employer pour la détermination des orbites des comètes.

Lorsque les quantités r, ρ, $\frac{d\rho}{dt}$, seront connues, on déterminera, au moyen des équations (1) et (8), les valeurs des six quantités x, y, z, x', y', z', et par suite tous les élémens de l'orbite parabolique. Si l'on veut se borner à déterminer la distance périhélie qui suffit pour procéder immédiatement à la recherche de l'orbite corrigée, en nommant D cette distance, on aura, n° 17, livre III,

$$D = r - \tfrac{1}{2}.\left(\frac{rdr}{dt}\right)^2.$$

La première des équations (A) différenciée, en observant qu'on a, n° 8, en négligeant le cube de l'excentricité de l'orbe terrestre,

$$\frac{dR}{dt} = e\sin(A - \varpi), \quad \frac{dA}{dt} = \frac{1 - \frac{1}{2}e^2}{R^2},$$

donnera

$$\left.\begin{aligned} \frac{rdr}{dt} = {} & \frac{\rho}{\cos^2 b}.\left(\frac{d\rho}{dt} + \rho.\operatorname{tang} b\frac{db}{dt}\right) + \frac{d\rho}{dt}.R\cos(A - a) \\ & + \rho.\left[e\sin(A - \varpi)\cos(A - a) - \frac{1 - \frac{1}{2}e^2}{R}.\sin(A - a)\right] \\ & + \rho.R\sin(A - a).\frac{da}{dt} + Re\sin(A - \varpi). \end{aligned}\right\}(C)$$

En nommant s cette quantité, elle fera connaître, n° 17, livre cité, selon qu'elle sera négative ou positive, si la comète s'approche du périhélie, ou si elle l'a déjà dépassé; on aura ensuite

$$D = r - \frac{1}{2}.s^2;$$

la distance angulaire v de la comète à son périhélie sera donnée par l'équation de la parabole,

$$\cos^2 \frac{1}{2} v = \frac{D}{r}.$$

On déterminera enfin par la table des comètes le temps que la comète emploie à décrire l'angle v, et ce temps ajouté ou retranché de l'époque de l'observation, fera connaître l'instant du passage par le périhélie.

2. Il ne reste donc, pour l'application de la méthode précédente, qu'à montrer comment on formera, d'après les données de l'observation, les valeurs des coefficiens différentiels $\frac{da}{dt}$, $\frac{db}{dt}$, $\frac{d^2a}{dt^2}$, $\frac{d^2b}{dt^2}$. Voici la manière la plus simple de procéder à cette opération.

Soit a la longitude de la comète à l'instant où l'on fixe l'origine du temps t; on prendra pour cette époque celle de l'observation qui tient à peu près le milieu entre toutes les autres; on pourra au bout d'un temps quelconque t, peu éloigné de cette époque, supposer la longitude a' de la comète représentée par la formule,

$$a' = a + t.\frac{da}{dt} + \frac{t^2}{2}.\frac{d^2a}{dt^2} + \frac{t^3}{2.3}.\frac{d^3a}{dt^3} + \text{, etc.} \quad (11)$$

On formera autant d'équations semblables à la précédente qu'on aura d'observations, et l'on pourra déterminer par leur moyen autant de coefficiens $\frac{da}{dt}$, $\frac{d^2a}{dt^2}$, etc.

Prenons donc, pour fixer les idées, trois observations quel-

conques de la comète; désignons par a°, a, a', les trois longitudes qui leur correspondent, et soient θ et θ' les espaces de temps, exprimés en jours moyens solaires, qui séparent respectivement les deux observations extrêmes de l'observation moyenne; on aura, d'après la formule générale, les deux équations suivantes :

$$\left.\begin{aligned} a - a^{\circ} &= \theta.\frac{da}{dt} - \frac{\theta^2}{1.2}.\frac{d^2a}{dt^2}, \\ a' - a &= \theta'.\frac{da}{dt} + \frac{\theta'^2}{1.2}.\frac{d^2a}{dt^2}. \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Si l'on nomme b°, b, b', les latitudes de la comète, correspondantes aux trois observations, on aura de même

$$\left.\begin{aligned} b - b^{\circ} &= \theta.\frac{db}{dt} - \frac{\theta^2}{1.2}.\frac{d^2b}{dt^2}, \\ b' - b &= \theta'.\frac{db}{dt} + \frac{\theta'^2}{1.2}.\frac{d^2b}{dt^2}. \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

La résolution de ces équations donnera les valeurs des quatre quantités $\frac{da}{dt}$, $\frac{d^2a}{dt^2}$, $\frac{db}{dt}$, $\frac{d^2b}{dt^2}$, qu'il s'agissait de déterminer.

Dans les équations précédentes, les intervalles de temps θ et θ' étant exprimés en jours moyens solaires, pour l'uniformité du calcul, on les multipliera, n° 8, liv. III, par le nombre dont le logarithme est 8,2355821, et l'on convertira en même temps les arcs $a - a^{\circ}$, $b - b^{\circ}$, etc., en parties du rayon pris pour unité.

L'exactitude de la méthode précédente dépend surtout de la précision des valeurs des quantités $\frac{da}{dt}$, $\frac{db}{dt}$, $\frac{d^2a}{dt^2}$, $\frac{d^2b}{dt^2}$. Les erreurs des observations doivent influer d'autant plus sur les deux dernières qu'elles seront plus petites; il sera donc bon de n'employer, comme cette méthode permet de le faire, que la plus grande de ces deux quantités.

On conçoit qu'en multipliant les observations de la comète, on pourrait former autant d'équations semblables aux équations (12) et (13); en combinant ensuite ces équations par la

méthode des moindres carrés, on formerait quatre nouvelles équations qui serviraient à déterminer les inconnues $\frac{da}{dt}$, $\frac{db}{dt}$, $\frac{d^2a}{dt^2}$, $\frac{d^2b}{dt^2}$. Mais, indépendamment de la longueur des calculs, on a reconnu qu'on n'était pas, par ce procédé, conduit à des résultats plus certains, parce que les erreurs des observations prenaient alors d'autant plus d'influence sur les résultats qu'elles étaient plus nombreuses. Il faudra donc, dans cette méthode comme dans les autres, se borner à employer trois observations, nombre strictement nécessaire pour résoudre la question, et alors elle en offrira peut-être la solution la plus simple, parce qu'on peut se servir immédiatement des données de l'observation sans leur faire subir aucune préparation. Il suffit à la sûreté des résultats que les observations ne soient pas trop éloignées entre elles pour que la formule générale (11) cesse d'être convergente.

3. Pour faciliter l'usage des formules précédentes, nous allons en faire l'application à la comète de 1824, dont nous avons déjà déterminé l'orbite d'une autre manière dans le n° 23 du livre III.

Je choisis les trois observations suivantes, qui sont séparées par des intervalles de temps assez inégaux; cas où il sera surtout avantageux d'employer la méthode que nous venons d'exposer, parce que celle qui est développée dans le livre cité suppose toujours les différences de ces intervalles très petites, et que, sans cette condition, elle ne donnerait plus des résultats suffisamment exacts.

		Longitudes observées.	Latitudes observées.
Août.	$4^j,92748$	a^0.. 252°32′29″	b^0... 48° 7′29″ B
	16,93308	a... 237.27.12	b.... 55.19.43
Sept..	3,91004	a'... 218. 4.34	b'.... 61. 4.20.

Si l'on prend pour époque l'observation du 16 août, on aura

$$a = 237^\circ 27' 12'', \quad b = 55^\circ 19' 43'',$$

et pour les intervalles de temps θ et θ' qui séparent les deux observations extrêmes de l'observation moyenne,

$$\theta = 12^j,00560, \qquad \theta' = 17^j,97696.$$

Si l'on ajoute aux logarithmes de chacun de ces nombres, le logarithme constant 8.2355821, et si l'on réduit les arcs $a^o - a$, $a - a'$ en parties du rayon, on formera les deux équations suivantes :

$$0.263336 = -\ 0.206522 \cdot \frac{da}{dt} + 0.021326 \cdot \frac{d^2a}{dt^2},$$

$$-\ 0.338196 = \quad 0.309242 \cdot \frac{da}{dt} + 0.047815 \cdot \frac{d^2a}{dt^2},$$

d'où l'on tire

$$\frac{da}{dt} = -\ 1.202436, \qquad \frac{d^2a}{dt^2} = 0.703698.$$

On aurait de même, relativement à la latitude,

$$-\ 0.125731 = -\ 0.206522 \cdot \frac{db}{dt} + 0.021326 \cdot \frac{d^2b}{dt^2}$$

$$0.100245 = \quad 0.309242 \cdot \frac{db}{dt} + 0.047815 \cdot \frac{d^2b}{dt^2},$$

d'où l'on tire

$$\frac{db}{dt} = 0.494828, \qquad \frac{d^2b}{dt^2} = -\ 1.103768.$$

On a d'ailleurs, par les tables du Soleil pour l'époque de l'observation moyenne,

$$A = 323^\circ\, 53'\, 29'' \qquad \log. R \ldots\ldots\ 0.0051558,$$

$$\log. \frac{1 - \frac{1}{4}e^2}{R} = 9.9947826 \qquad \log. e \sin(A - \varpi) \ldots\ 8.0684537.$$

Avec ces valeurs, on a formé, au moyen des formules (B) et (a), les trois équations suivantes :

$$r^2 = 1.02402 + 0.12574.\varrho + 3.08301.\varrho^2,$$
$$\frac{1}{r} = 0.48820 + 0.28372\ \varrho + 1.30573.\varrho^2,$$
$$\frac{d\varrho}{dt} = -0.348376.\varrho,$$

et leur résolution a donné

$$r = 1.24584,\quad \varrho = 0.39399,\quad \frac{d\varrho}{dt} = -0.13726,$$

d'où l'on a conclu, par la formule (c),

$$s = -0.701284;$$

on a trouvé ensuite, pour la distance périhélie, et pour l'instant du passage au périhélie,

$$D = 0.99999,\quad \text{inst. du pass. sept. } 30^j{,}0371.$$

On peut, avec ces élémens approchés, procéder immédiatement à la détermination exacte de l'orbite par les méthodes exposées dans le chapitre II du livre III.

Il existe encore, pour la détermination de l'orbite des comètes, plusieurs méthodes généralement fondées sur le rapport remarquable qui existe entre la corde qui soustend un arc quelconque de parabole, les deux rayons vecteurs menés à ses extrémités, et le temps employé à le décrire; mais nous n'entrerons dans aucun détail à cet égard, parce que ces méthodes, quoique ingénieuses, nous paraissent manquer du principal avantage qu'on doit rechercher pour les applications, celui de la simplicité dans les calculs.

NOTE V.

Sur la détermination du prochain retour au périhélie de la comète de 1759.

Dans le n° 46 du troisième livre, j'ai dit que l'altération qu'éprouva le moyen mouvement de cette comète par l'action de la Terre, en 1759, avait été déterminée par Burckart, et qu'il avait trouvé + 0",02679 pour la valeur de cette altération. J'ai eu depuis lors l'occasion de reprendre ce calcul en m'occupant d'un mémoire sur la détermination des perturbations des trois comètes périodiques que nous connaissons, travail auquel l'Académie royale des Sciences a décerné le prix qu'elle avait proposé sur ce sujet, pour le concours de 1829. En attendant que je puisse publier ce travail en entier, je vais en extraire les résultats que j'ai obtenus relativement à l'action de la Terre sur la comète dite *de Halley*, et indiquer la marche que j'ai suivie pour les obtenir.

La grande proximité entre la comète et la Terre n'a eu lieu qu'après le passage au périhélie de 1759, et jusqu'à cette époque, le calcul montre qu'on peut regarder l'action de cette planète comme insensible. La comète s'est ensuite approchée de plus en plus de la Terre depuis le 13 mars, instant du passage, jusqu'au 29 avril, époque où sa distance était moindre que le quart de la distance de la Terre au Soleil; elle s'en est ensuite rapidement éloignée, et bientôt la Terre a cessé d'exercer sur elle aucune influence appréciable. D'après cela, j'ai calculé par la méthode du n° 35, livre III, et en faisant varier de degré en degré l'anomalie excentrique, les altérations des divers élémens de l'orbite résultantes de l'action de la Terre, pendant la révolution actuelle, depuis 0° jusqu'à 45°. Dans cette évaluation, je n'ai pas tenu compte de l'action de la Terre sur le Soleil, parce que j'ai supposé que ces actions se compensent à très peu près dans les différentes révolutions de la Terre autour

de cet astre, pendant l'intervalle qui s'écoule entre 1759 et le prochain passage de la comète au périhelie. Cela posé, j'ai trouvé

$$\int dn = 0'',024555.$$

Les variations des autres élémens sont insensibles, et les valeurs des trois intégrales $\int t dn$, $\int d\varpi$, $\int d\epsilon$, par exemple, ne s'élèvent pas à quelques secondes dans l'intervalle que nous considérons. On peut donc supposer ici la variation de l'anomalie moyenne égale à très peu près à $t \int n$, t désignant le temps de la révolution anomalistique de la comète. Si l'on prend pour t la valeur 28007^j que nous avons trouvée n° 46, livre cité, on aura $\int d\zeta = +687''.71$. Nous avons trouvé, même numéro, pour l'altération de cette anomalie résultante de l'action de Jupiter, Saturne et Uranus, pendant le même intervalle, $+3714'',43$. On aura donc, pour sa valeur complète, $\int d\zeta = +4402'',14$; et en nommant T' l'intervalle de temps compris entre le passage au périhélie 1759 et le passage prochain, on aura

$$T' = \frac{360° - 4402'',14}{46'',14142} = 28087^j,56 - 95^j,41 = 27992^j,15;$$

ce qui, à compter du 13,2 mars 1759, donne le 2,3 novembre 1835, pour l'époque du prochain retour de la comète à son périhélie.

L'évaluation précédente porte à $14^j,9$ le retard que la comète éprouve dans sa marche par l'action de la Terre. Burckart avait trouvé 16^j pour ce retard, et M. Damoiseau, qui l'a pareillement calculé, l'a fixé à 12^j seulement. Au reste, cette détermination est fort délicate, et l'on doit s'attendre à plusieurs jours d'incertitude, si l'on n'a pas soin de resserrer autant que possible les intervalles d'anomalie excentrique pendant l'espace où la comète s'approche beaucoup de la Terre. La méthode que M. Damoiseau a suivie dans son calcul diffère de celle que l'on emploie d'ordinaire, principalement en ce qu'au lieu de prendre l'anomalie excentrique pour abscisse de la courbe parabolique, qui donne par sa quadrature les varia-

tions finies de chacun des élémens de l'orbite, il choisit le temps pour cette variable. Ce procédé, dont Euler avait déjà fourni l'exemple dans une occasion pareille, peut être avantageux lorsqu'il s'agit des comètes à courtes périodes, parce que, dans la partie supérieure de l'orbite, les degrés d'anomalie excentrique répondant à des intervalles de temps beaucoup plus considérables que dans la partie inférieure, il en résulte des variations fort inégales dans les élémens de l'orbite. Si la méthode proposée par M. Damoiseau offre donc toute la sûreté et la simplicité désirables dans les applications numériques, il sera bon de l'adopter pour ce cas. C'est à l'expérience à décider cette question (*).

NOTE VI.

Sur le plan invariable du système planétaire.

Je n'ajouterai que quelques mots à ce que j'ai dit sur cet objet, dans le n° 79 du second livre. Les adversaires de la théorie connue de ce plan prétendent que les changemens que peuvent produire dans sa position l'ellipticité et la rotation du Soleil avaient échappé à l'esprit si clairvoyant de son inventeur, et que, par ce fait même, la détermination de ce plan, telle qu'elle résulte de ses formules, est incomplète. Il est facile de répondre à cet argument. En effet, si des variations dues aux causes ci-dessus mentionnées existaient dans la position du plan invariable, c'est aux équations même du mouvement de translation des corps célestes, qu'il faudrait recourir pour les déterminer. Nous avons montré dans le n° 10 du livre cité, que les circonstances inhérentes à la constitution de notre système planétaire autorisent à négliger dans ce mouvement tous les termes provenant de la figure non elliptique du Soleil et des planètes; c'est ce qu'a fait Laplace, c'est ce qu'ont fait tous les géomètres qui l'ont précédé; bien plus,

(*) *Connaissance des Tems* pour 1832.